

Final automne 2019

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 4 points

1) Déterminer, sous la forme arithmétique $x + iy$, les racines carrées de

$$-3 + 4i$$

3) Déterminer les solutions de l'équation

$$z^2 - (2 + i).z + 3 + i = 0.$$

Exercice 2 - 8 points

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver une matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) telle que $A.P = P.D$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Trouver l'inverse de P

(c.a.d. la matrice $P^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $P.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

3) Montrer **par récurrence** que $A^n = P.D^n.P^{-1}$.

4) Exprimer A^n en fonction de n .

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - 6 points

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) Equation différentielle du premier ordre à variables séparées :

$$(E_1) y' \cdot (1 + x^2) = 4x \cdot \sqrt{y}.$$

2) Equation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E_2) xy' - 2y = -\frac{3}{x}$$

3) Equation différentielle linéaire du second ordre :

$$(E_3) y'' + y' + y = -\cos(2x) - 5\sin(2x).$$

Exercice 4 - 2 points

résoudre l'équation :

$$\arccos(2x) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right).$$