Médian

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *10 points*

1) Déterminer, dans chacun des cas suivants, les ensembles de points :

a - $\{a \in \mathbb{R}, \frac{|a-5|}{|a+5|} = 1\}$,

b - $\{z \in \mathbb{C}, \frac{|z-5|}{|z+5|} = 1\}$,

c - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{|x-5|}{|y+5|} = 1\}$,

2) Discuter suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le nombre de racines réelles des équations suivantes (Préciser dans quels cas ces polynômes ont deux racines distinctes de signe opposé) :

a - $(m-3)x^2 + (2m-1)x + m + 2 = 0$,

b - $mx^2 - 2(8m+1)x + 4(4m+1) = 0$.

3) Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{x.\sin(x)}$.

Exercice 2 *(***NOUVELLE FEUILLE***) - 6 points*

1) En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété "n crayons de couleurs sont tous de la même couleur".

** $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.*

** Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.*

Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

** On a donc démontré que des crayons de couleur sont tous de la même couleur.*

2) Démontrer par récurrence qu'à partir de n assez grand (que l'on précisera),

$$2^n > n + 1.$$

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 *(***NOUVELLE FEUILLE***) - 8 points*

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe des ensembles de nombres rationnels qui ont une borne supérieure non rationnelle.

Si une question pose problème, admettre le résultat et passer à la suivante !

1) Montrer que

$$n \text{ entier impair} \Longrightarrow n^2 \text{ entier impair.}$$

Ce qui démontre par la même occasion, par contraposée, n^2 *entier pair* $\Longrightarrow n$ *entier pair.*

2) on veut montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$*, c.a.d. que* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *avec* $p, q \in \mathbb{Z}$ *est impossible.*
On suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *(quitte à simplifier par 2, on supposera que* p *ou* q *est impair).*

a - Montrer que, avec cette hypothèse, on aurait p *pair (utiliser le 1).*

b - En déduire qu'on aurait également q *pair.*

c - En déduire que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *est impossible.*

QUESTIONS SUPPLÉMENTAIRES :

3) Soit $E(.)$ *la partie entière (c.a.d.* $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) = max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$ *"le plus grand entier inférieur ou égal à* x*").*

On considère l'ensemble $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ *avec* $a_n = \frac{E(\sqrt{2}.10^n)}{10^n}$.

a - Sachant que $\sqrt{2} = 1.414213562...$*, calculer* a_0, a_1, a_2, a_3

b - conclure.