Médian PM18, Automne 2007

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie. Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification. Une feuille de notes A4 recto-verso est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 Borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (7 points)

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure. Soient $A = \left\{x \in \mathbb{Q}^{*+}, x^2 < 2\right\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{Q}^{*+}, x^2 > 2\right\}$. Supposons que $\alpha = sup_{\mathbb{Q}} A$ existe **dans** $\mathbb{Q}$ ($\alpha \in \mathbb{Q}$).

1. Soit $\beta = \dfrac{2}{\alpha}$.

- **a.** Soit $x \in B$. Montrer que $\dfrac{2}{x} \in A$.
- **b.** En déduire que β est un minorant de B.
- **c.** Montrer que β est la borne inférieure de B dans $\mathbb{Q}$.

2.

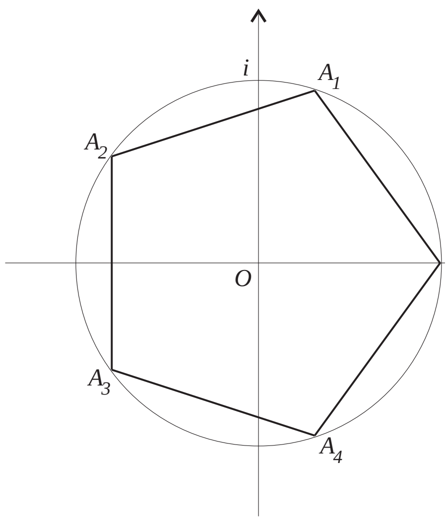
- **a.** Montrer que $\alpha^2 \leqslant 2$ (on pourra raisonner de manière formelle avec des $\epsilon > 0$).
- **b.** Peut-on avoir $\alpha^2 = 2$? (on supposera admis que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
- **c.** Montrer de même que $\beta^2 > 2$.

3. Soit $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$,

- **a.** Peut-on avoir $\gamma^2 = 2$?
- **b.** Supposons que $\gamma^2 < 2$, montrer qu'alors $\gamma \leqslant \alpha$ et obtenir une contradiction.
- **c.** Peut-on avoir $\gamma^2 > 2$?

Exercice 2 Construction du pentagone régulier (8 points)

Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On note $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ l'affixe des points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4.



1. **a.** Montrer que $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
   b. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
   c. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.
2. **a.** En prenant la partie réelle de l'égalité précédente, montrer que

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0.$$

   b. En utilisant la formule $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$.
   c. Résoudre cette équation, et expliquer pourquoi $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
3. On considère le point B d'affixe -1.
   a. Calculer $|\omega_1^2 + 1|$.
   b. En déduire que $BA_2 = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$.
4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$, et enfin le point J intersection de $\mathcal{C}$ avec le segment $[BI]$.
   a. Calculer la longueur BI.
   b. Calculer la longueur BJ.
   c. En déduire que $BJ = BA_2$.
5. **[Hors barème]** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Exercice 3 Calcul matriciel (5 points)

Soient a, b, c et m des nombres réels. On considère le système d'équations linéaires

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ mx & + & (1-m)y & + & 2(m-1)z & = & b \\ 2x & + & my & - & (3m+1)z & = & c \end{array}\right.$$

1. On suppose $m = -1$. Montrer que (S) admet des solutions si et seulement si $c = 3a + b$.
2. On suppose $m = -1$ et $c = 3a + b$. Trouver une solution du système (S) et montrer que ce système admet une infinité de solutions.
3. On suppose $m \neq -1$. Montrer que le système (S) admet une solution unique que l'on calculera.
4. Pour quelles valeurs de m la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2m-2 \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Dans ce cas, donner son inverse.

Exercice 1

1. **a.** *Soit* $x \in B$: $x^2 > 2 \Rightarrow \dfrac{2}{x^2} < 1 \Rightarrow \dfrac{4}{x^2} < 2 \Rightarrow \dfrac{2}{x} \in A$.

   b. *Soit* $x \in B$, *on sait que* $\dfrac{2}{x} \in A \Rightarrow \dfrac{2}{x} \leqslant \alpha \Rightarrow x \geqslant \dfrac{2}{\alpha} = \beta$, *donc* β *est bien un minorant.*

   c. *Soit* $\epsilon > 0$, *et* $b = \beta + \epsilon$. *Alors,* $b > \beta \Rightarrow \dfrac{2}{b} < \dfrac{2}{\beta} = \alpha$. *Comme* α *est la borne supérieure de* A, *cela veut dire qu'il existe* $x \in A$ *tel que* $\dfrac{2}{b} < x < \alpha$, *et donc* $b > \dfrac{2}{x} > \beta$ *où* $\dfrac{2}{x} \in B$, *donc* β *est bien la borne inférieure de* B.

2. **a.** *D'après la caractérisation de la borne supérieure,* $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \epsilon < x \leqslant \alpha$. *En prenant le carré de cette inéquation, on obtient que* $\forall \epsilon > 0, (\alpha - \epsilon)^2 < x^2 < 2$, *et donc en prenant la limite lorsque* $\epsilon \to 0$, *on montre que* $\alpha^2 \leqslant 2$.

   b. $\alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$, *ce qui contredit le fait que* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *et* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

   c. *On montre de même que* $\beta^2 \geqslant 2$, *puis que* $\beta^2 > 2$ *car* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3. **a.** *Comme* $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \in \mathbb{Q}$, *et on ne peut donc pas avoir que* $\gamma^2 = 2$.

   b. *Si* $\gamma^2 < 2$, *alors par définition* $\gamma \in A$ *et donc* $\gamma \leqslant \alpha \Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \alpha \Rightarrow \beta \leqslant \alpha$, *ce qui contredit le fait que* $\alpha < 2$ *et* $\beta > 2$.

   c. *On montre de même que* $\gamma^2 \not> 2$, *ce qui fournit une contradiction (*γ *a une valeur, qui doit être ou égale à 2, ou inférieure, ou supérieure). Ainsi l'hypothèse faîte dans l'énoncé est fausse, et* A *ne possède pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$.

Exercice 2

1. **a.** *Le point* A_1 *est l'image de* A_0 *dans la rotation de centre* O *et d'angle* $\frac{2\pi}{5}$. *Donc* $\omega_1 = e^{\frac{i2\pi}{5}}$. *Cette rotation est la transformation* $z \mapsto e^{\frac{i2\pi}{5}} z$.

   b. *On montre que* $\omega_k = \omega_1^k$ *pour* $k \in [\![0..4]\!]$ *en itérant l'image de* A_0 *par la rotation.*

   c. $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = \dfrac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = 0$ *car* $\omega_1^5 = 1$.

2. **a.** *En prenant la partie réelle, on obtient :* $1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$. *Or par symétrie,* $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}$, *et* $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5}$. *Ainsi* $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$.

   b. $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$, *et en reportant cette égalité dans l'équation précédente, on obtient :* $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1) = 0$, *et donc* $4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$.

   c. $\Delta = 2^2 + 4 \times 4 \times 1 = 20 = 2^2 \times 5$, *et on obtient deux solutions*

$$z_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad \textit{et} \qquad z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

   De ces deux solutions, on prend celle qui est positive : $\cos\frac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

3. **a.** $|\omega_1^2 + 1| = |e^{i\frac{4\pi}{5}} + 1| = |e^{i\frac{2\pi}{5}}(e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}})| = |e^{i\frac{2\pi}{5}}| \times |e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}| = |e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}| = |2\cos\dfrac{2\pi}{5}| = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b. *$BA_2 = |\omega_2 - (-1)| = [\omega_1^2 + 1| = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ d'après la question précédente.*

4. **a.** *Par le théorème de Pythagore dans le triangle OIB, on a $BI = \sqrt{OB^2 + IB^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.*

b. $BJ = BI - IJ = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

c. *D'après les questions **2.c.** et **3.b.**, on en déduit que $BJ = BA_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.*

5. ***Méthode de construction du pentagone régulier :*** *on trace un cercle de centre O, puis deux diamètres perpendiculaires que l'on appelle (OA) et (OB). On prend I le milieu de $[OA]$, on trace le cercle de centre I et de rayon $[IO]$. Le segment $[BI]$ coupe ce cercle en J. On prend l'écart BJ, et on le reporte sur le cercle à partir de B pour obtenir deux points A_2 et A_3. On a ainsi déterminé un côté (le segment $[A_2A_3]$) du pentagone régulier, ce qui suffit pour le construire entièrement.*

Remarque. La question de savoir si un polygône régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas a été un grand sujet d'étude en mathématiques. On sait que ce polygône est constructible si et seulement si $n = 2^k \times F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_k$, où les $F_j = 2^{2^j} + 1$ sont des nombres premiers de Fermat distincts ($F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65237$ sont les seuls nombres premiers de Fermat connus à ce jour ; on conjecture que ce sont les seuls dans ce cas).

Exercice 3

1. *Pour $m = -1$, on écrit le système, puis on applique la méthode de Gauss :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 2z & = & a & \\ -x & + & 2y & - & 4z & = & b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & y & - & 2z & = & a+b \\ & & y & - & 2z & = & -2a+c \end{array}\right.$$

En faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on trouve l'équation $0 = 3a + b - c$, qui admet une solution si et seulement si $c = 3a + b$.

2. *Dans ce cas, on obtient le système :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & y & - & 2z & = & a+b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} x & = & 2a+b \\ y & = & a+b+2z \end{array}\right.$$

qui admet une infinité de solutions (chaque valeur de z donne une solution différente ; en fait on vérifie que l'ensemble des solutions est la droite affine passant par $A = (2a+b, a+b, 0)$ et de vecteur directeur $(0, 2, 1)$).

3. *On résoud le système*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 2z & = & a & \\ mx & + & (1-m)y & + & 2(m-1)z & = & b & L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ 2x & + & my & - & (3m+1)z & = & c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl l} x & - & y & + & 2z & = & a & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ & & y & - & 2z & = & -ma + b & \\ & & (m+2)y & - & (3m+5)z & = & -2a + c & L_3 \leftarrow L_3 - (m+2)L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcrcl} x & & & = & (1-m)a + b \\ & y & - 2z & = & -ma + b \\ & & -(1+m)z & = & (m^2 + 2m - 2)a - (m+2)b + c \end{array} \right.$$

Et comme $m \neq -1$, on peut diviser par $1 + m$, et on trouve la solution qui est unique :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & (1-m)a + b \\ y & = & \dfrac{-3m^2 - 5m + 4}{m+1}a + \dfrac{3m+5}{m+1}b + \dfrac{-2}{m+1}c \\ z & = & \dfrac{-m^2 - 2m + 2}{m+1}a + \dfrac{m+2}{m+1}b - \dfrac{1}{m+1}c \end{array} \right.$$

4. *En lisant les coeeficients du système précédent, on trouve l'inverse de la matrice demandée :*

$$\begin{pmatrix} 1-m & 1 & 0 \\ \dfrac{-3m^2 - 5m + 4}{m+1} & \dfrac{3m+5}{m+1} & \dfrac{-2}{m+1} \\ \dfrac{-m^2 - 2m + 2}{m+1} & \dfrac{m+2}{m+1} & \dfrac{-1}{m+1} \end{pmatrix}.$$