Corrigé du médian

Exercice 1

Le but de cet exercice est de retrouver les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{6})$ et $\sin(\frac{\pi}{6})$. Pour cela, nous allons déterminer de deux manières différentes les racines du polynôme $P = X^2 - 2iX - 4$.

1. Calculer le discriminant de P et en déduire ses racines sous forme algébrique.
2. (a) Déterminer les racines cubiques de $8i$.
   (b) Soit z une racine du polynôme P. En particulier $z^2 = 2iz + 4$. Montrer que $z^3 = 8i$.
   (c) Déterminer alors les racines de P sous forme exponentielle.
3. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{6})$ et $\sin(\frac{\pi}{6})$.

Corrigé :

1. Calculons le discriminant de P :

$$\Delta = (-2i)^2 + 16 = 12.$$

Les racines carrées de Δ sont $2\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{3}$. On en déduit les racines de P :

$$z_1 = \frac{2i + 2\sqrt{3}}{2} = i + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2i - 2\sqrt{3}}{2} = i - \sqrt{3}.$$

2. (a) Soit $Z = 8i$. Écrivons Z sous forme exponentielle : $Z = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$. Les racines cubiques de Z sont donc $2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $2e^{i\frac{9\pi}{6}} = -2i$.
   (b) Soit z une racine de P. Donc $z^2 = 2iz + 4$. Donc

$$z^3 = zz^2 = z(2iz + 4) = 2iz^2 + 4z = 2i(2iz + 4) + 4z = -4z + 8i + 4z = 8i.$$

   (c) Les deux racines de P sont donc des racines cubiques de $8i$. Elles sont donc égales à deux des trois racines cubiques obtenues dans la question 2-a. Comme $-2i$ n'est pas une racine de P ($(-2i)^2 - 2i(-2i) + 4 = -4 \neq 0$), les racines de P sont $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.
3. On a obtenu de deux manières différentes les racines de P. On peut identifier facilement ces racines :

$$i + \sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad i - \sqrt{3} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

On déduit de la première égalité que $i + \sqrt{3} = 2\cos(\frac{\pi}{6}) + 2i\sin(\frac{\pi}{6})$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on trouve

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2

Soit a un nombre réel. On cherche à résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y-z & = & 1 \\ -x+3y+z & = & a \\ y+z & = & 0 \end{array}\right. .$$

1. Donner la matrice A associée au système.
2. Calculer son inverse.
3. En déduire les solutions du système.
4. Pour quelles valeurs du paramètre a existe-t-il une solution (x,y,z) telle que $xyz=0$?

Corrigé :

1. La matrice associée au système est la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons l'inverse de A :

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \longrightarrow \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

$$\longrightarrow \underset{L_1 \leftarrow L_1+2L_2+L_3}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Le système s'écrit matriciellement

$$A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme A est inversible, cette équation a une unique solution donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+a \\ 1+a \\ -1-a \end{pmatrix}.$$

La solution du système est donc $x=2+a, y=1+a$ et $z=-1-a$.

4. Le système possède une solution (x,y,z) telle que $xyz=0$ si et seulement si $(2+a)(1+a)(-1-a)=0$, donc si et seulement si $a=-2$ ou $a=-1$.

Exercice 3

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire que :
   (a) A est inversible et donner la matrice de son inverse,
   (b) $A+2I$ ou $A-2I$ est non inversible.

Corrigé :

1. On trouve
$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
Donc $A^2 = 4I$.
2. (a) On en déduit que $A \times \frac{1}{4}A = I$. Donc A est inversible et son inverse est $\frac{1}{4}A$:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
   (b) De plus, on peut déduire de $A^2 = 4I$ que $A^2 - 4I = 0$ et donc que
$$(A-2I)(A+2I) = 0.$$
Montrons alors que $A+2I$ ou $A-2I$ est non inversible. Supposons au contraire que ces deux matrices sont inversibles. On obtient alors
$$(A-2I)^{-1}(A-2I)(A+2I) = (A-2I)^{-1} \cdot 0.$$
Donc $A+2I = 0$. Or on a supposé que $A+2I$ était également inversible. On obtient donc une contradiction et l'une des deux matrices est non inversible.

Exercice 4

À tout nombre réel positif t, on associe le nombre complexe $z_t = \frac{t}{t+1}e^{i\pi t}$. On s'intéresse dans cet exercice à l'ensemble S de ces nombres :

$$S = \{z_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}.$$

1. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes z_t pour $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}$ et 2.
2. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $|z_t| < 1$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Calculer $|z_t|$ pour $t = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.
4. En déduire que $\sup\{|z_t| \mid t \in \mathbb{R}_+\} = 1$.
5. Représenter l'ensemble S dans le plan complexe.

Corrigé :

1. Voir figure.
2. Soit t un nombre réel positif. Le module de z_t est égal à $\frac{t}{t+1}$. Or $0 \leq t < t+1$. Donc $0 \leq \frac{t}{t+1} < 1$. Donc $|z_t| < 1$.
3. Soit $\varepsilon > 0$ et $t = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Calculons le module de z_t :

$$|z_t| = \frac{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}+1} = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon} = 1-\varepsilon.$$

   Donc $|z_t| = 1-\varepsilon$.
4. Notons $|S|$ l'ensemble $\{|z_t| \mid t \in \mathbf{R}_+\}$. D'après la question 2, 1 est un majorant de $|S|$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $1-\varepsilon$ est dans $|S|$ car $|1-\varepsilon| = |z_t|$ pour $t = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.
   Ainsi, ε pouvant être choisi arbitrairement petit, on peut trouver des nombres de $|S|$ aussi proche de 1 que l'on souhaite. On en déduit que 1 est un point adhérent à $|S|$.
   C'est donc la borne supérieure de $|S|$.
5. L'ensemble S est une spirale qui se rapproche infiniment du cercle unité (*i.e.* le cercle de centre 0 et de rayon 1).