PM18 20 octobre 2009

Examen médian

Exercice 1

Le but de cet exercice est de retrouver les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{6})$ et $\sin(\frac{\pi}{6})$. Pour cela, nous allons déterminer de deux manières différentes les racines du polynôme $P = X^2 - 2iX - 4$.

1. Calculer le discriminant de P et en déduire ses racines sous forme algébrique.
2. (a) Déterminer les racines cubiques de $8i$.
   (b) Soit z une racine du polynôme P. En particulier $z^2 = 2iz + 4$. Montrer que $z^3 = 8i$.
   (c) Déterminer alors les racines de P sous forme exponentielle.
3. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{6})$ et $\sin(\frac{\pi}{6})$.

Exercice 2

Soit a un nombre réel. On cherche à résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - z & = & 1 \\ -x + 3y + z & = & a \\ y + z & = & 0 \end{array} \right. .$$

1. Donner la matrice A associée au système.
2. Calculer son inverse.
3. En déduire les solutions du système.
4. Pour quelles valeurs du paramètre a existe-t-il une solution (x, y, z) telle que $xyz = 0$?

Exercice 3

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire que :
   (a) A est inversible et donner la matrice de son inverse,
   (b) $A + 2I$ ou $A - 2I$ est non inversible.

Exercice 4

À tout nombre réel positif t, on associe le nombre complexe $z_t = \frac{t}{t+1} e^{i\pi t}$. On s'intéresse dans cet exercice à l'ensemble S de ces nombres :

$$S = \{z_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}.$$

1. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes z_t pour $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}$ et 2.
2. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $|z_t| < 1$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Calculer $|z_t|$ pour $t = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.
4. En déduire que $\sup\{|z_t| \mid t \in \mathbb{R}_+\} = 1$.
5. Représenter l'ensemble S dans le plan complexe.