Corrigé médian - PM18 - A2010

Exercice 1

1. L'équation $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ admet exactement 6 solutions dans l'intervalle $]-\pi\,,\pi]$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Alors $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ avec $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Donc $\sin\alpha = -\frac{4}{9}\sqrt{2}$

3. $\sqrt{3}+i = 2\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{6}}$ d'où, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad \arg\left[\left(\sqrt{3}+i\right)^n\right] = \frac{n\pi}{6}$.

   $$\left(\sqrt{3}+i\right)^n \in i\mathbb{R} \iff \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{N}\ /\ n = 3+6k$$

4. $$\left|\frac{2z}{z-i}\right| = 2 \iff \frac{2\,|z|}{|z-i|} = 2 \iff |z| = |z-i|$$

   L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[OJ]$ où J est le point d'affixe i. Cette droite est donc parallèle à l'axe des abscisses.

5. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal, l'ensemble d'équation $y = 5x-1$ est un plan dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix}$

   Ce plan est parallèle à l'axe (Oz).

6. $\overrightarrow{u} \perp (\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{v} \perp (\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 2

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ Or $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}$

   Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. On peut choisir $\quad \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$

3. Le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

   $$5(x-1)+3(y-2)+4(z-3) = 0 \quad \text{c'est-à-dire } \boxed{5x+3y+4z-23=0}$$

4. La distance d du point S au plan (ABC) est donnée par la formule :

   $$d = \frac{|5x_S+3y_S+4z_S-23|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|5+3+4-23|}{\sqrt{5^2+3^2+4^2}} = \frac{11}{\sqrt{50}} = \frac{11\sqrt{2}}{10}$$

5. (a) VOIR COURS.

   (b) On prend $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Alors $\overrightarrow{AS}\wedge\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$

   Donc $\left\|\overrightarrow{AS}\wedge\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

   Ainsi $SH = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

Exercice 3

1. (a) Les racines carrées de $-8+6i$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -8+6i$. Posons $z = x+iy$ avec x et y réels. Alors

   $$z^2 = -8+6i \iff \left\{\begin{array}{rcl}\Re e((x+iy)^2) & = & -8\\ \Im m((x+iy)^2) & = & 6\\ \left|(x+iy)^2\right| & = & \sqrt{(-8)^2+6^2}\end{array}\right.$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=-8\\2xy=6\\x^2+y^2=10\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x^2=1\\y^2=9\\xy=3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x=1\\y=3\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x=-1\\y=-3\end{array}\right.$$
   $$\iff z = 1+3i \text{ ou } z = -1-3i$$

   (b) $f(M) = M \iff \frac{i\,z+i-2}{z-1} = z \iff iz+i-2 = z(z-1)$
   $\iff z^2-(1+i)z-i+2 = 0$. Le discriminant de cette équation est :
   $\Delta = (1+i)^2-4(-i+2) = 1+2i-1+4i-8 = -8+6i \overset{1.(a)}{=} (1+3i)^2$. Donc

   $$f(M) = M \iff z = \frac{(1+i)-(1+3i)}{2\times 1} \text{ ou } z = \frac{(1+i)+(1+3i)}{2\times 1}$$
   $\iff z = -i$ ou $z = 1+2i$
   L'application f admet deux points invariants D et E d'affixes respectives $d = -i$ et $e = 1+2i$.

2. Soit B le point d'affixe $b = -1 - 2\,i$.

$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\,,\ z' = \dfrac{i\,z + i - 2}{z-1} = \dfrac{i(z+1+2i)}{z-1} = i\,\dfrac{z-(-1-2i)}{z-1} = i\,\dfrac{(z-b)}{z-a}$

• En passant aux modules, pour tout point $M \neq A$ (c.à.d. $z \neq a$) :
$OM' = |z'| = \left| i\,\dfrac{(z-b)}{z-a} \right| = |i|\,\dfrac{|z-b|}{|z-a|} = 1 \times \dfrac{BM}{AM} = \dfrac{MB}{MA}$

• En passant aux arguments, pour tout point M distinct de A et de B (c.à.d $z \neq a$ et $z \neq b$), on a $M' \neq O$ et :

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{OM'}}\right) &= \arg(z') \\
&= \arg\left(i\,\frac{(z-b)}{z-a}\right) \\
&= \arg(i) + \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{AM}\,,\overrightarrow{BM}}\right) \\
&= \left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}}\right) + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

3. On suppose que M appartient à la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$.
Alors $MA = MB$ (avec $M \neq A$). D'où $\dfrac{MB}{MA} = 1$ ce qui implique que $OM' = 1$.
Par conséquent le point $M' = f(M)$ appartient au un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.

4.

$$\begin{aligned}
M \in (\Gamma) \quad &\iff \quad M' \in (O\,;\overrightarrow{u}) \\
&\iff \quad M' = O \text{ ou } \left(\widehat{\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{OM'}}\right) = k\,\pi \text{ (avec } k \in \mathbb{Z}) \\
&\overset{\text{d'après 2.}}{\iff} \quad M = B \text{ ou } \left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}}\right) + \frac{\pi}{2} = k\,\pi \\
&\iff \quad M = B \text{ ou } \left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\,\pi \\
&\iff \quad M = B \text{ ou } \left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k'\,\pi \text{ (avec } k' \in \mathbb{Z}) \\
&\iff \quad \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \text{ et } M \neq A
\end{aligned}$$

Par conséquent (Γ) est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.

On remarquera que (Γ) est l'image réciproque par f de l'axe $(O\,;\overrightarrow{u})$ des abscisses.