Tronc commun

PM18

Médian - Automne 2010

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Exercice 1 (6 points)

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. On demande d'indiquer laquelle sans justification. Chaque réponse juste rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Vous pouvez décider de ne pas répondre à certaines questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à zéro.

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $\sin(3x) = \dfrac{1}{2}$ dans l'intervalle $]-\pi\,,\pi]$?

   (a) 2 (b) 3 (c) 6 (d) une infinité

2. Soit α un nombre réel tel que $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Alors $\sin(2\alpha) = \dots$

   (a) $\dfrac{2}{3}$ (b) $\dfrac{4}{9}\sqrt{2}$ (c) $-\dfrac{4}{9}\sqrt{2}$ (d) $-\dfrac{4}{9}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n$ est un imaginaire pur si **et seulement si**

   (a) $n = 3$ (b) $n = 6k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$ (c) $n = 6$ (d) $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$

4. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\dfrac{2z}{z-i}\right| = 2$ est :

   (a) un cercle de rayon 1 (b) une droite parallèle à l'axe des abscisses
   (c) un cercle de rayon 2 (d) une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses

5. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k}\right)$, l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient $y = 5x - 1$ est :

   (a) une droite incluse dans le plan (xOy)
   (b) un plan perpendiculaire à l'axe (Oz)
   (c) une droite parallèle à l'axe (Oz)
   (d) un plan parallèle à l'axe (Oz)

6. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont :

   (a) orthogonaux (b) colinéaires (c) égaux (d) on ne peut rien dire

Exercice 2 (7 points)

Dans cet exercice, des réponses brèves sont attendues. On ne demande pas de rédaction détaillée sauf pour la question 5.(a)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points

$$A(1,2,3) \quad ; \quad B(2,3,1) \quad ; \quad C(3,0,2) \quad \text{et} \quad S(1,1,1)$$

1. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan (ABC).
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
4. Calculer la distance du point S au plan (ABC).
5. (a) QUESTION DE COURS : soit Δ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

   Démontrer que la distance du point S à la droite Δ est égale à $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AS}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$

   On pourra introduire le point H projeté orthogonal de S sur Δ.

   (b) Calculer la distance de S à la droite (AB).

Exercice 3 (7 points)

Cet exercice sera rendu sur une feuille séparée. La qualité de la rédaction et la présentation entreront pour une part importante dans la notation.

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$, on note A le point d'affixe $a=1$ et f l'application du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z (M distinct de A), associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z'=\frac{i\,z+i-2}{z-1}$$

1. (a) Calculer les racines carrées de $-8+6\,i$.

   (b) Déterminer l'affixe des points M invariants par f, c'est-à-dire tels que $f(M)=M$.
2. Soit B le point d'affixe $b=-1-2\,i$.

   Démontrer que pour tout point M distinct de A et de B, on a :

$$OM'=\frac{MB}{MA} \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{OM'}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}}\right)+\frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

3. On désigne par (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$.

   Démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient à un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O dont on précisera le rayon.
4. Dans cette question, on se propose de déterminer, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

   À l'aide de la question 2, déterminer géométriquement la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ).