Exercice 1

Sujet A

Affirmation	Réponse
1.	V
2.	F
3.	F
4.	V
5.	V
6.	F
7.	F
8.	F
9.	F
10.	F

Sujet B

Affirmation	Réponse
1.	F
2.	V
3.	F
4.	F
5.	F
6.	F
7.	F
8.	V
9.	F
10.	V

Exercice 2 (sujet A)

1. $\widehat{A} = \widehat{BAC} = 180° - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 99°$.

   D'après la loi des sinus, $\dfrac{AB}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{BC}{\sin\widehat{A}}$ d'où $AB = \dfrac{\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}}\,BC$

   On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC). Alors AH est la distance du point A à la droite (BC).

   Le triangle ABC a pour aire : $\mathcal{S} = \dfrac{BC \times AH}{2} = \dfrac{1}{2}\,BA \times BC\,\sin\widehat{B}$

   On en déduit que $AH = AB\,\sin\widehat{B}$ puis $\boxed{AH = \dfrac{\sin\widehat{B}\,\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}}\,BC}$

   Application numérique : $AH \approx 22,31$ à 10^{-2} près par défaut.

2. $z = 1 + i\,\tan\dfrac{\pi}{9} = 1 + i\,\dfrac{\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{\pi}{9}} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{9} + i\,\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{\pi}{9}} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{9}}$ avec $\cos\dfrac{\pi}{9} > 0$

   et $\overline{z} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}\,\mathrm{e}^{-i\,\frac{\pi}{9}}$.

3. Soit $x \in [-1\,;\,1]$ un réel fixé.
   On sait que $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ et que $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

   D'où $\sin(\arccos x) \geqslant 0$ et $\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$.

   Donc $\boxed{\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}}$

4. (a) $\varphi(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\,\arctan 1 = \dfrac{\pi}{2}$

   De plus $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow 0} \arctan t = \arctan(0)$ par continuité en zéro de la fonction arctan

   D'où, par composition, $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan\frac{1}{x} = \arctan(0) = 0$

   Or on sait que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

   Donc $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

   (b) La fonction φ est-elle dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et

   $\forall\,x > 0,\ \varphi'(x) = \arctan'(x) + \arctan'\left(\dfrac{1}{x}\right) \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

   $= \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2 + \frac{x^2}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1}$.

   Ainsi $\forall\,x > 0,\ \boxed{\varphi'(x) = 0}$

   (c) La fonction φ est dérivable sur **l'intervalle** $]0\,,+\infty[$ et sa dérivée est nulle sur cet intervalle. Par conséquent φ est constante sur $]0\,,+\infty[$.

   $\forall\,x > 0,\ \boxed{\varphi(x) = \varphi(1) = \dfrac{\pi}{2}}$

Exercice 2 (sujet B : pour les questions 1, 2 et 3 voir ci-dessus)

1. $\widehat{A} = 99°$ et $AH = \dfrac{\sin\widehat{B}\,\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}}\,BC \approx 14,87$ à 10^{-2} près par défaut.

2. $z = 1 + i\,\tan\dfrac{\pi}{7} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{7}}$ avec $\cos\dfrac{\pi}{7} > 0$

   $\dfrac{1}{z} = \cos\dfrac{\pi}{7}\,\mathrm{e}^{-i\,\frac{\pi}{7}}$.

3. Soit $x \in [-1\,;\,1]$. Alors $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ d'où $\cos(\arcsin x) \geqslant 0$

   Puis $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

4. Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = -2\arccos(\sqrt{x})$

   (a) $\varphi(x)$ existe ssi $-1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$ c.à.d. $0 \leqslant x \leqslant 1$.
   La fonction φ est définie sur l'intervalle fermé $[0\,;\,1]$.

   (b) La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;\,1]$, la fonction arccos est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ et $\forall\, x \in]0\,;\,1[,\ u(x) \in]-1\,;\,1[$.

   Donc la composée $\arccos \circ u$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0\,;\,1[$ et la fonction $\varphi = -2\,(\arccos \circ u)$ est dérivable sur $]0\,;\,1[$

   (c) On rappelle que $(\arccos \circ u)' = (\arccos' \circ u) \times u'$.

   Alors $\forall\, x \in]0\,;\,1[,\ \varphi'(x) = -2\,\dfrac{-1}{\sqrt{1-u(x)^2}} \times u'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   $$\text{Donc } \forall\, x \in]0\,;\,1[,\ \boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}}$$

Exercice 3

Partie A

1. (a) $AB = |z_B - z_A| = |z_B - 1| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$.
   Donc le point B appartient au cercle $\mathscr{C}$.

   (b) $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}\,,\,\overrightarrow{AB}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_F - z_A}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
   Placer le point B.

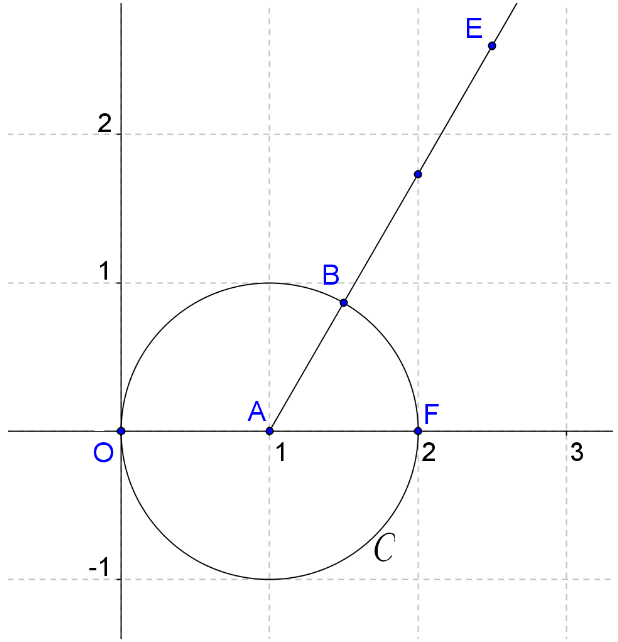
2. (a) $z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et

   $$z_E - z_A = z_B^2 = \left(\frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

   $$\text{D'où} \quad \boxed{z_E - z_A = 3\,e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

   (b) On constate que $z_E - z_A = 3(z_B - z_A)$ donc $\overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AB}$ et les points A, B et E sont alignés.

3. Puisque $\overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AB}$, on peut dire que E est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport 3.



Partie B

1. Soit $z \neq 0$ et $z \neq 1$. Alors $M \neq A$ et $M' \neq A$ car $z^2 \neq 0$.

   $$\arg\left(\frac{z'-1}{z-1}\right) = \arg\left(\frac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AM}\,,\,\overrightarrow{AM'}}\right).$$

2. On a supposé dans toute cette partie que $z \neq 1$ donc $M \neq A$.

   Les points A, M et M' sont alignés
   si, et seulement si, $M' = A$ ou $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}\,,\,\overrightarrow{AM'}}\right) = k\,\pi$ avec k entier relatif
   ssi $z' = 1$ ou $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z-1}\right) = k\,\pi$ avec k entier relatif
   ssi $z' = 1$ ou $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre **réel non nul**
   ssi $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel.