Tronc commun

PM18

Médian - Automne 2011

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'utilisation d'une seule calculatrice par étudiant est autorisée.
L'utilisation de tout formulaire est interdite.

Exercice 1 (5 points)

Vous indiquerez pour chacune des dix affirmations suivantes si elle est Vraie ou Fausse, sans justification. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point et chaque réponse fausse enlève 0,5 point.

1. Toute fonction périodique est nécessairement définie sur $\mathbb{R}$.
2. L'équation $2\cos(2x) = 1$ admet quatre solutions dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
3. La fonction arcsin est une bijection de $[-1\,;1]$ sur $[0\,;\pi]$.
4. La fonction arctan est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
5. On pose $Z = \dfrac{-\sqrt{2}}{1+i}\,\mathrm{e}^{i\pi/3}$. Alors $\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de Z.
6. La fonction arccos est paire.
7. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\dfrac{z}{z+i}\right| = 1$ est un cercle.
8. La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \tan(\arctan x)$ est une droite.
9. $$\left.\begin{array}{c} 4\cos^2 x < 3 \\ 0 < x < \pi \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \frac{\pi}{6} < x < \pi$$
10. L'équation $\arcsin x = \arccos\left(\dfrac{1}{5}\right)$ admet une seule solution.

Exercice 2 (7 points)

Dans cet exercice, des réponses brèves sont attendues. On ne demande pas de rédaction détaillée. Les quatre questions sont indépendantes.

1. Dans un triangle ABC, $BC = 40$, $\widehat{ABC} = 27°$ et $\widehat{ACB} = 54°$
   Calculer la distance du point A à la droite (BC).
2. On pose $z = 1 + i \tan \dfrac{\pi}{7}$. Écrire sous forme exponentielle les complexes z et $\dfrac{1}{z}$.
3. Écrire sous la forme d'une racine carrée de polynôme, l'expression : $\cos(\arcsin x)$
4. Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = -2 \arccos(\sqrt{x})$
   (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction φ.
   (b) Sur quel ensemble la fonction φ est-elle dérivable ?
   (c) On note φ' sa dérivée. Calculer $\varphi'(x)$

Exercice 3 (8 points)

Cet exercice sera rendu sur une feuille séparée. La qualité de la rédaction et la présentation entreront pour une part importante dans la notation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique 2 cm. On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$, et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

Partie A

Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_B = 1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $z_E = 1 + z_B^2$.

1. (a) Montrer que le point B appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   (b) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}}\right)$.
   Placer le point B.
2. (a) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $z_B - z_A$ et $z_E - z_A$.
   (b) En déduire que les points A, B et E sont alignés.
3. Placer le point E.

Partie B

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\dfrac{z'-1}{z-1}$.
2. En déduire que A, M et M' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z^2}{z-1}$ est un nombre réel.