

Médian automne 2014

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 8 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{U} = \vec{i} + \vec{j}.$$

1. Déterminer une équation de la droite D passant par A et de vecteur directeur \vec{U} .
2. Déterminer une équation de la droite D' passant par B et C .
3. Déterminer le point d'intersection E des droites D et D' . Justifier de façon mathématique. On pourra utiliser un graphique pour vérifier le résultat.
4. Déterminer les coordonnées du point F tel que $(ACEF)$ soit un parallélogramme. Justifier de façon mathématique. On pourra utiliser un graphique pour vérifier le résultat.

Exercice 2 - 9 points

1. Soit $x \in]\pi, 3\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x = 2$.
Calculer les valeurs exactes de $\cos x$ et $\sin x$. Justifier soigneusement.
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\sqrt{12} \cdot \cos(2x) - 2 \cdot \sin(2x) = \sqrt{8}$. Justifier soigneusement.
3. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $-\sin^2(x) + 2 \cos(x) + 2 = 0$. Justifier soigneusement.

Exercice 3 - 6 points

Soit z un nombre complexe tel que $z \cdot \bar{z} = 1$. On pose, pour $z \neq 1$, $Z = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$

1. Démontrer que Z est réel.
2. Réciproquement, montrer que si Z est réel alors $z \cdot \bar{z} = 1$.
3. On considère l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui à z associe Z comme une application ponctuelle du plan \mathbb{R}^2 dans lui-même
 - (a) Quelle est la courbe (C) représentant l'équation $z \cdot \bar{z} = 1$?
 - (b) Quelle est la courbe image de (C) par l'application $z \mapsto Z$?