Final de ps11

Durée 1h30, sans documents

Exercice I

L'espace est rapporté au référentiel galiléen $R(O, b(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}))$. Une particule P de masse m est soumise à une force donnée :

$$\vec{F}_P = ma(\sin(wt)\vec{x} + \cos(wt)\vec{y}), \quad a > 0, w > 0$$

A l'instant initial, $t = 0$, la particule est à l'origine O du repère, sans vitesse initiale.

On adopte un paramétrage cartésien : $\overrightarrow{OP} = x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} + z(t)\vec{z}$

On demande :

I.1) par application du principe fondamental de la dynamique, l'expression de l'accélération $\vec{\gamma}(P)/R$,

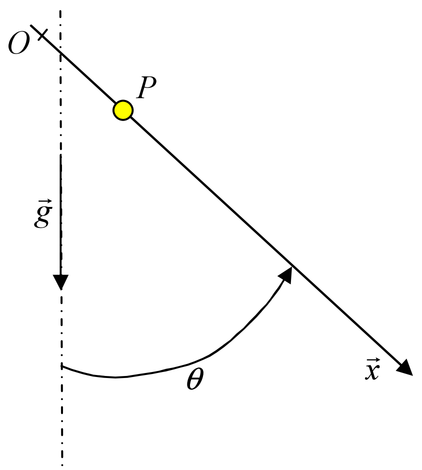
I.2) par intégration, en pensant à ne pas oublier les constantes d'intégration, l'expression paramétrique de la trajectoire, $\overrightarrow{OP}(t)$,

I.3) la distance parcourue et le temps $t = t_1 > 0$, lorsque la particule s'arrête pour la première fois,

I.4) le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant $t = \dfrac{\pi}{w}$.

Indications : On rappelle que $\cos(wt) = 1 - 2\sin^2(\frac{wt}{2}) = 2\cos^2(\frac{wt}{2}) - 1$

Exercice II



On considère un anneau P de masse m, ponctuel.

Il est astreint à se déplacer sans frottement sur une tige infinie fixe par rapport au référentiel terrestre R_t, galiléen. L'axe de la tige $(O, \vec{x})$, est incliné d'un angle $\theta, \theta \in]0, \pi[$ par rapport à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

On retient le paramétrage, $\overrightarrow{OP} = x(t)\vec{x}$, et les conditions initiales, $\overrightarrow{OP}(t=0) = \vec{0}, \quad \vec{V}(P)/R_t(t=0) = \vec{0}$.

Les actions mécaniques prises en compte sont :

- la pesanteur, $\vec{P} = m\vec{g}$
- la résistance de l'air, $\vec{T} = -h\vec{V}(P)/R_t$
- l'action de la tige sur l'anneau, $\vec{R}$ telle que $\vec{R}.\vec{x} = 0$.

II.1) Représenter les actions mécaniques sur une figure.

Ecrire la projection selon $\vec{x}$ du principe fondamental de la dynamique. Est-ce une équation du mouvement? Justifier votre réponse.

II.2) En déduire la vitesse de P, par rapport à R_t.

- Quelle est la vitesse limite atteinte pour $\theta = 0$?
- Quelle est l'expression du vecteur unitaire tangent $\vec{t}$ si $\theta > \dfrac{\pi}{2}$?

II.3) Déterminer le vecteur position de P.

II.4) Déterminer l'expression de l'inconnue de liaison $\vec{R}$.