PS11, Final A09

Durée 1h30, sans documents, ni calculatrices

I) On considère un système mécanique constitué de 2 points matériels.
I.1) Quelle est la différence entre un point matériel et un point géométrique ?
I.2) Combien d'équations scalaires indépendantes peut nous fournir le principe fondamental de la mécanique ?

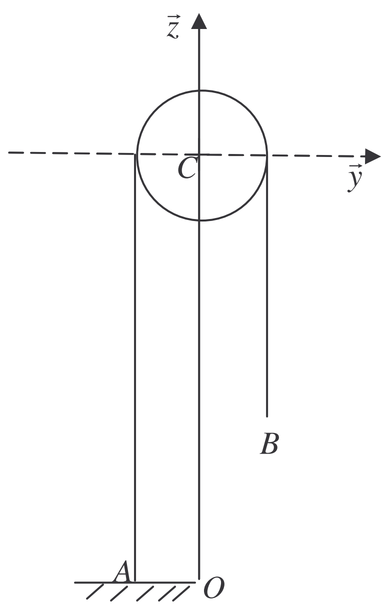
II) Un point P de masse m se déplace sur une parabole dans le plan $\pi(O,\vec{x},\vec{y})$,
d'équation $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$. Son abscisse curviligne s(t) est définie par l'équation différentielle : $\frac{ds(t)}{dt} = as(t)$, où a est une constante.

II.1) donner l'expression de l'énergie cinétique de la particule par rapport au repère $R\ (O,b(\vec{x},\vec{y},\vec{z}))$, en fonction de s(t).

II.2) en résolvant l'équation différentielle qui s'écrit aussi $\frac{ds(t)}{dt} = as(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\ln(s(t)) = a$, donner l'expression de l'énergie cinétique en fonction du temps t. à t=0, $S(t=0) = S_0$.

II.3) Donner l'expression de l'accélération tangentielle en fonction du temps.

III) Liaison par fil inextensible
On considère le moufle décrit sur la figure suivante : c'est une poulie de rayon r, dont le centre C se déplace sur l'axe $(O,\vec{z})$.



Le paramétrage retenu s'écrit : $\overrightarrow{AC} = r\vec{y} + a(t)\vec{z}$, $\overrightarrow{AB} = 2r\vec{y} + c(t)\vec{z}$. Il n'est pas compatible avec la liaison par fil inextensible. Nous allons rechercher l'équation de liaison. On connait une configuration de référence : $a = 5r, c = 0$.

III.1) déterminer l'expression de la longueur ℓ du fil, en fonction de a, c, r puis en utilisant la configuration de référence.

III.2) puisque le fil a une longueur ℓ constante, la dérivée $\frac{d}{dt}\ell = 0$. En déduire la relation entre $\dot{a}$ et $\dot{c}$.

IV) On considère un système de 3 points, P_1, P_2, P_3, de masse respective m_1, m_2, m_3. Rappeler l'expression barycentrique qui permet de trouver le vecteur position du centre de masse G des points P_1, P_2, P_3, dans un repère d'origine O, à l'instant t.

V) On donne la représentation paramétrique du mouvement d'un point P, par rapport au repère R(O,b($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$)) : $\overrightarrow{OP}(t) = 2t\vec{x} + \frac{2}{t}\vec{y}, t \in \left]0, +\infty\right]$

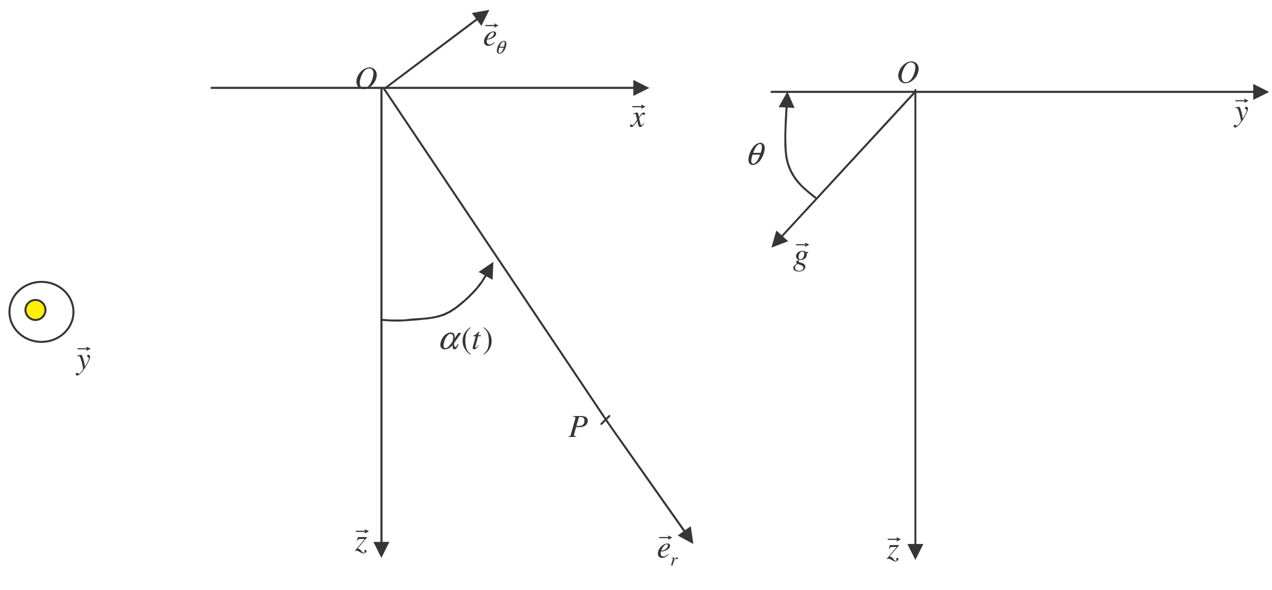
VI.1) Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point P dans son mouvement par rapport à R.

VI.2) Déterminer en fonction du temps, les composantes des vecteurs de la base de Frenet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$

VI) Pendule simple

Un point P de masse m est en liaison ponctuelle parfaite avec le plan $\pi(O, \vec{n} = \vec{y})$. Il est aussi relié au point O, par un fil sans masse, inextensible de longueur ℓ. Le plan est inclinée d'un angle θ, par rapport à la verticale.

On adopte le paramétrage suivant :



$\overrightarrow{OP} = \ell\vec{e}_r(\alpha(t))$
Le repère $R_t(O,b(\vec{x},\vec{y},\vec{z}))$, est galiléen

L'objectif de l'étude est de rechercher le mouvement, avec les conditions initiales :
$à\ t = 0, \alpha(t=0) = \frac{\pi}{4}, \dot{\alpha}(t=0) = 0$.

Les actions mécaniques se résument : à l'action du fil, et à celle du plan, inconnues et à la pesanteur. On donne $\vec{g} = g(-\cos(\theta)\vec{y} + \sin(\theta)\vec{z}), \theta \in [0, \pi/2]$.

VII.1) Calculer l'expression de la vitesse puis de l'accélération du point P par rapport à $R_t(O,b(\vec{x},\vec{y},\vec{z}))$.

VII.2) La liaison parfaite avec le plan est telle que $\vec{F}_{\pi p} = N\vec{y}$, celle par fil impose : $\vec{F}_{fp} = T\vec{e}_r$.

- Justifier ces expressions,
- Les efforts N et T sont des inconnues du problème de dynamique. Quelles sont les inégalités à vérifier pour s'assurer que le fil est bien tendu et que le contact unilatéral avec le plan $\pi(O, \vec{n} = \vec{y})$ est bien réalisé ?

VII.3) On considère le système mécanique constitué du point P. En projetant l'équation vectorielle fournit par le PFD, selon la direction appropriée, donner l'équation du mouvement.

VII.4) Retrouver cette équation par le théorème de l'énergie cinétique.

- Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de P par rapport à $R_t(O,b(\vec{x},\vec{y},\vec{z}))$,
- Déterminer la puissance associée aux actions mécaniques agissant sur P, dans le mouvement de P par rapport à $R_t(O,b(\vec{x},\vec{y},\vec{z}))$,
- Rappeler l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique, puis, écrire son expression.

VII.5) Donner une expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

- Expliquer comment on peut la faire apparaître dans l'expression du Théorème de l'énergie cinétique, ci-dessus.

VII.6) Donner l'expression de l'énergie mécanique de ce système, conservatif.

- Rappeler la définition de l'énergie mécanique,
- La donner dans le cadre de cette application.