Final de ps11

Sans documents, sans calculatrices, durée 1h30

I) Questions de cours

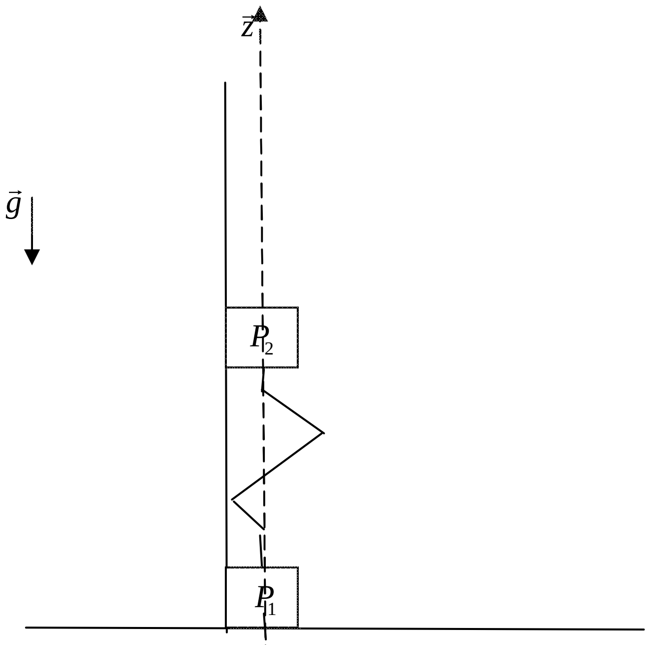
I.1) Qu'appelle-t-on portrait de phase d'un système mécanique à une mobilité ?

Représenter l'allure du portrait de phase d'un système masse ressort régi par l'équation de mouvement : $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$, en justifiant que cette équation implique $\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\frac{k}{m}x^2)=0$.

I.2) Montrer que le centre de gravité d'un système de points isolés a une trajectoire rectiligne et une accélération tangentielle nulle, par rapport à un référentiel galiléen. Quelle est l'autre dénomination de ce mouvement de référence ?

II) Reprise d'un exercice de TD

Deux masses ponctuelles, P_1 de masse m_1 et P_2 de masse m_2, sont reliées par un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0. Au repos l'ensemble repose sur une table horizontale, et un guidage non représenté sur la figure n'autorise qu'une translation verticale. Il n'y a pas de frottement.

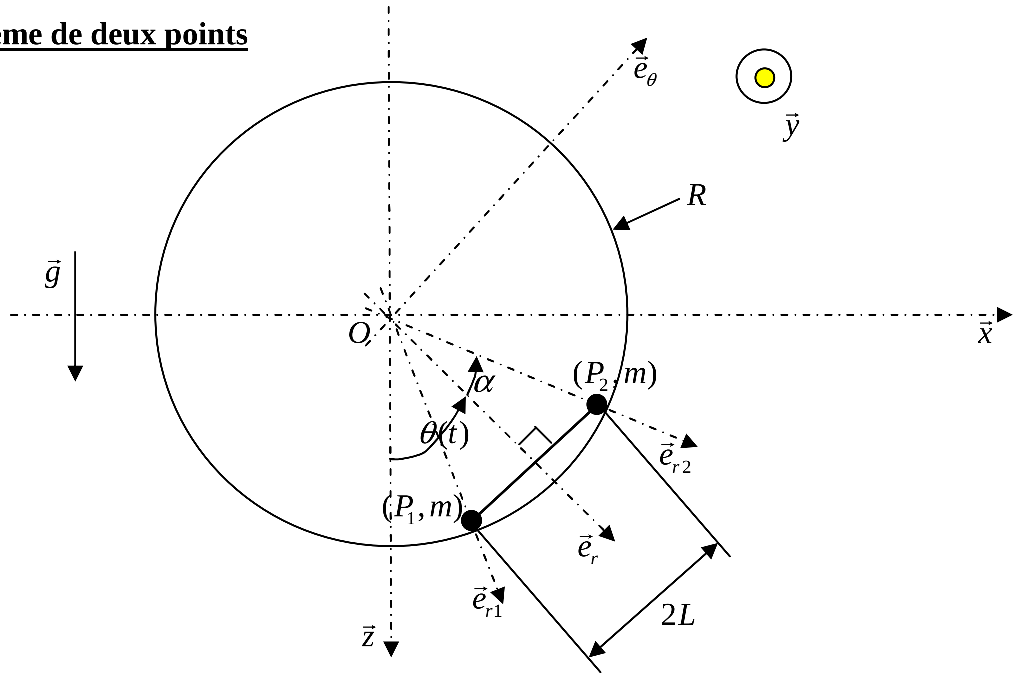


On adopte le paramétrage : $\overrightarrow{P_1P_2}=z(t)\vec{z}$

1) déterminer la valeur de $z(t)=z_e$, à l'équilibre.
2) On pose le changement de variable $Z=z-z_e$. On écarte ensuite le système de sa position d'équilibre, d'une valeur q.
   - trouver la loi $Z(t)$, en considérant le système $\{P_2\}$.
   - la condition sur q, pour qu'il n'y ait pas de décollement de P_2, en considérant le système $\{P_2, P_1\}$.

-

III) Système de deux points



Avec, α, **un angle de réglage constant** tel que $\alpha \in [0, pi/2]$, $\tan(\alpha) = \dfrac{L}{\sqrt{R^2 - L^2}}$.

Deux points P_1 et P_2, de masse identique m, sont liés par une barre rigide de masse négligeable, de longueur 2L. Ils sont en contact avec le plan géométrique $\pi(O, \vec{y})$ et à l'intérieur d'un cylindre C de rayon R, . Le système évolue dans le champ de pesanteur, tel que $\vec{g} = g\vec{z}$. On adopte comme paramètre le paramètre $\theta(t)$.

Modélisation

Le repère $R_g(O, b(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}))$, est galiléen,

Toutes les liaisons géométriques sont parfaites et réalisées, Les 5 inconnues de liaison sont définies ci-contre : $\vec{F}_{CP_1} = -N_1\vec{e}_{r1}$, $\vec{F}_{CP_2} = -N_2\vec{e}_{r2}$, $\vec{F}_{\pi P_1} = Y_1\vec{y}$, $\vec{F}_{\pi P_2} = Y_2\vec{y}$, $\vec{F}_{P_1P_2} = N_{12}\vec{e}_\theta$

III.1) bilan des inconnues et des équations

- Lister les inconnues de ce problème.
- Combien peut-on écrire d'équations de dynamique, indépendantes ?
- Justifier l'écriture $\vec{F}_{P_1P_2} = N_{12}\vec{e}_\theta$.

III.2) étude du système $\Sigma = \{P_1 \cup P_2\}$

a) Recherche de l'équation du mouvement

- calculer le moment dynamique en O, de $\Sigma=\{P_1\cup P_2\}$ dans son mouvement par rapport à $R_g(O,b(\vec{x},\vec{y},\vec{z}))$. On le note $\vec{\delta}(O)(\Sigma/R_g)=\overrightarrow{OP_1}\wedge m\vec{\gamma}(P_1)/R_g+\overrightarrow{OP_2}\wedge m\vec{\gamma}(P_2)/R_g$.

- calculer le moment en O des actions mécaniques extérieures à Σ, $\vec{M}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}(O)$, en remarquant bien que $\vec{F}_{P_1P_2}=N_{12}\vec{e}_\theta$ est une action mécanique intérieure à Σ. Pour calculer le moment lié à l'action de pesanteur, il est plus simple de calculer directement : $\vec{M}(O)(pes)=\overrightarrow{OP_1}\wedge m\vec{g}+\overrightarrow{OP_2}\wedge m\vec{g}=(m\overrightarrow{OP_1}+m\overrightarrow{OP_2})\wedge\vec{g}$, et d'utiliser la relation barycentrique. D'autre part, vous montrerez à la question III.3, que $Y_1=Y_2=0$.

- écrire l'équation de mouvement en projetant l'équation de moment en O selon la direction $\vec{y}$: $\vec{\delta}(O)(\Sigma/R_g).\vec{y}=\vec{M}_{\bar{\Sigma}\Sigma}(O).\vec{y}$

Elle se met sous la forme de l'équation d'un pendule non linéaire :

$\ddot{\theta}+\omega^2\sin(\theta)=0$, donner l'expression de ω^2.

b) Etude du mouvement

On lâche le pendule à t=0, sans vitesse initiale. On note $\theta(t=0)=\theta_0$.

Rechercher l'intégrale première du mouvement, en utilisant le facteur intégrant $\dot{\theta}$. Montrer que $\theta\in[-\theta_0,\theta_0]$ et faire une étude qualitative du mouvement.

c) Etude du mouvement du centre de gravité de Σ

Déterminer la vitesse du centre de gravité de Σ, $\vec{V}(G)/R_g$. Quelle est le maximum de sa norme ? Pour quelle valeur de θ se produit-elle ?

d) Déterminer l'énergie cinétique de $\Sigma=\{P_1\cup P_2\}$ dans son mouvement par rapport à R_g, $E_c(\Sigma)/R_g=\dfrac{m}{2}(\vec{V}^2(P_1)/Rg+\vec{V}^2(P_2)/Rg)$.

e) Déterminer l'énergie potentielle de pesanteur de $\Sigma=\{P_1\cup P_2\}$, en utilisant à nouveau la relation barycentrique pour simplifier le calcul.

f) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique du système $\Sigma=\{P_1\cup P_2\}$.

g) Retrouver l'équation du mouvement par application du théorème de l'énergie cinétique. Le système est-il conservatif ?

III.3) Recherche des inconnues de liaison Y_1 et Y_2

En travaillant successivement sur les sous systèmes $\Sigma_1=\{P_1\}$ et $\Sigma_2=\{P_2\}$, montrer que $Y_1=Y_2=0$. On pourra écrire une équation de résultante dynamique en projection selon $\vec{y}$, pour chacun des systèmes.

III.4) Recherche de l'inter-effort $\vec{F}_{P_1P_2}=N_{12}\vec{e}_\theta$

En considérant le système $\Sigma_1=\{P_1\}$, donner l'expression de $N_{12}(\theta)$. Le plus simple pour l'obtenir et de projeter l'équation de dynamique selon la direction perpendiculaire à $\vec{e}_{r1}$, $\vec{e}_{\theta 1}$ puis d'éliminer $\ddot{\theta}$ en utilisant l'équation de mouvement.