Jeudi 24 juin 2010

⌛ : 1 h 30

FINAL PS 11 – P 2010

NOM	Prénom	Signature

1. Satellite géostationnaire

On considère un satellite géostationnaire.

a. Quel est le plan de son orbite ? ____

b. Dans quel référentiel un tel satellite est-il immobile ? ____________________________

c. Ce référentiel est-il galiléen ? Justifier.

____

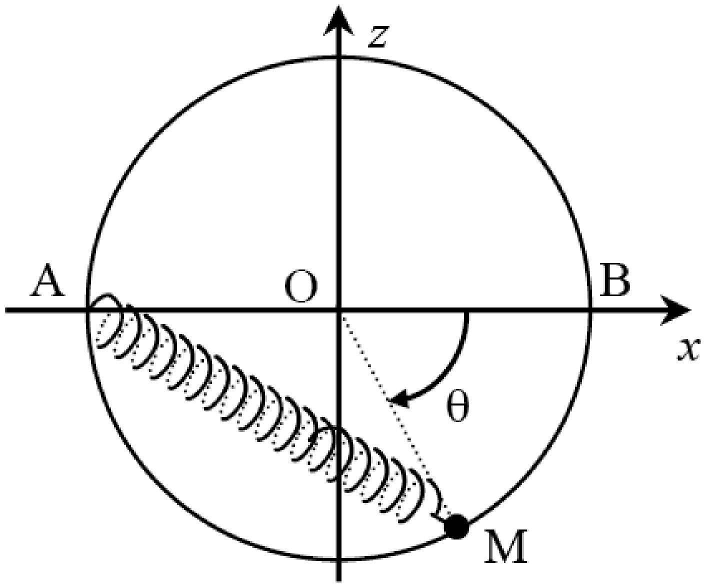
____

____

2. Étude d'un système masse + ressort

Un point matériel M de masse *m* peut coulisser sans frottement sur un cercle C de centre O et de rayon *R*, placé dans un plan vertical (O*xz*) où (O*z*) est orienté suivant la verticale ascendante. Le point M est attaché à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide égale à 2*R* et de constante de raideur *k*, dont l'autre extrémité est fixée au point A. Un dispositif non représenté impose au ressort de rester constamment rectiligne. La position du point M est repérée par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}\right)$. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g.\overrightarrow{e_z}$.

Données : $R = 10\ cm$; $m = 100\ g$; $k = 10\ N.m^{-1}$; $g = 10\ m.s^{-2}$; $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$.



a. Montrer que la longueur du ressort peut se mettre sous la forme $l = \mathrm{AM} = 2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

b. Représenter sur le schéma ci-dessus, sans souci d'échelle, les forces auxquelles est soumis le système M. Brève justification :

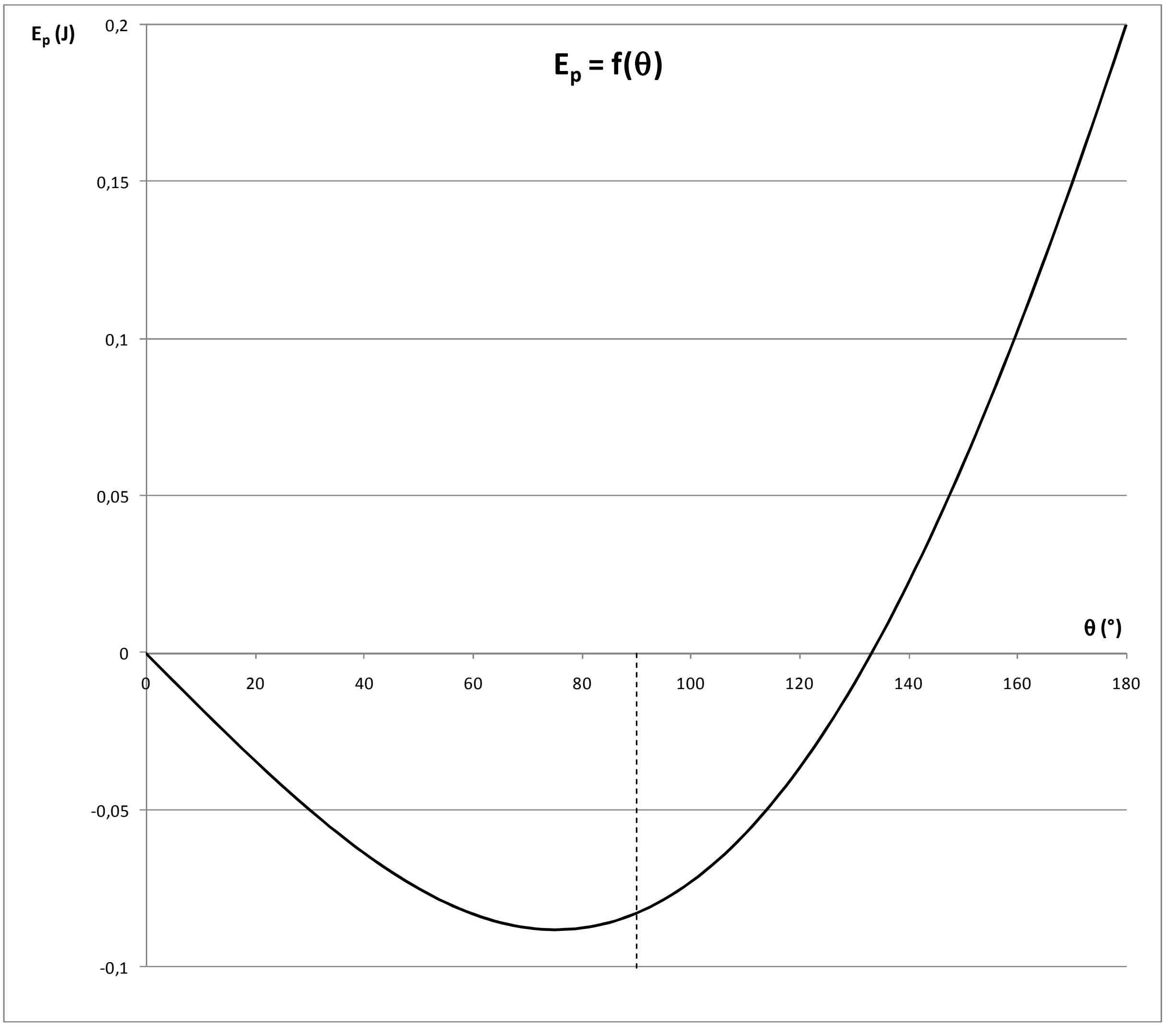
c. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(\theta)$ du point M. L'énergie potentielle élastique est prise nulle lorsque le ressort a sa longueur à vide, l'énergie potentielle de pesanteur est prise nulle lorsque la cote z du point M est nulle.

d. On donne ci-dessous la représentation graphique de $E_p(\theta)$, pour $0 \le \theta \le 180°$.

En déduire la valeur $\theta_{éq}$ de l'angle θ pour laquelle le point M peut être à l'équilibre sur le cercle. Cet équilibre est-il stable ou instable ? Justifier.

e. Le point matériel M est abandonné sans vitesse initiale depuis B. Déterminer, en justifiant, la valeur maximale $\theta_{\max}$ que l'angle θ atteint au cours du mouvement ainsi que la valeur $v_{\max}$ de la vitesse maximale atteinte.

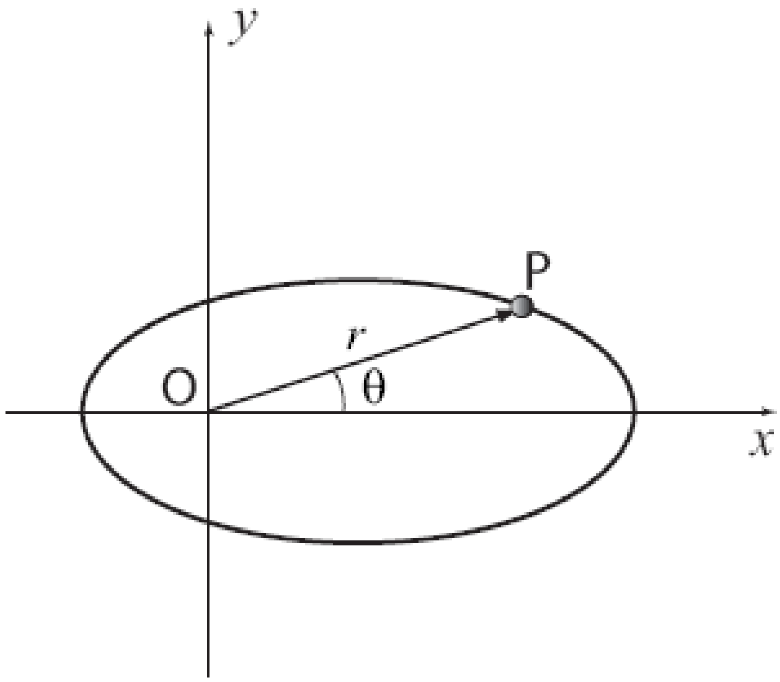
f. Le point matériel M est maintenant lancé depuis B avec une vitesse initiale $v_B = 1,0\, m.s^{-1}$. Déterminer la valeur maximale $\theta_{\max}$ que l'angle θ atteint au cours du mouvement ainsi que la valeur $v_{\max}$ de la vitesse maximale atteinte.



3. Trajectoire elliptique

La trajectoire d'un satellite P à orbite elliptique est représentée ci-dessous.

a. Représenter en P les bases de projection $\left(P, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}\right)$ et $\left(P, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{T}\right)$ des systèmes de coordonnées polaires et intrinsèques (base de Frenet).



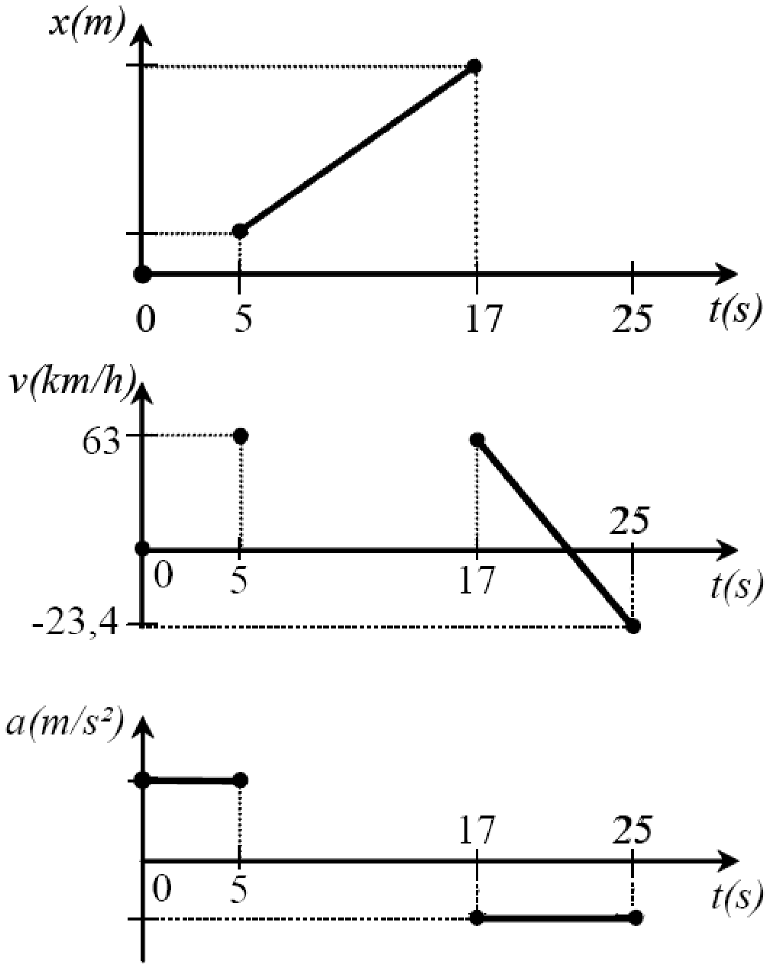
b. Établir les expressions des composantes polaires du vecteur vitesse de P.

4. Cinématique

On étudie le mouvement d'une voiture qui roule pendant 25 *s* sur une route horizontale et rectiligne. Des informations partielles sont connues (voir schémas ci-dessous).

En donnant toutes les justifications nécessaires dans le cadre ci-dessous, compléter cette description cinématique du mouvement de la voiture.

Ajouter les valeurs manquantes sur les schémas.



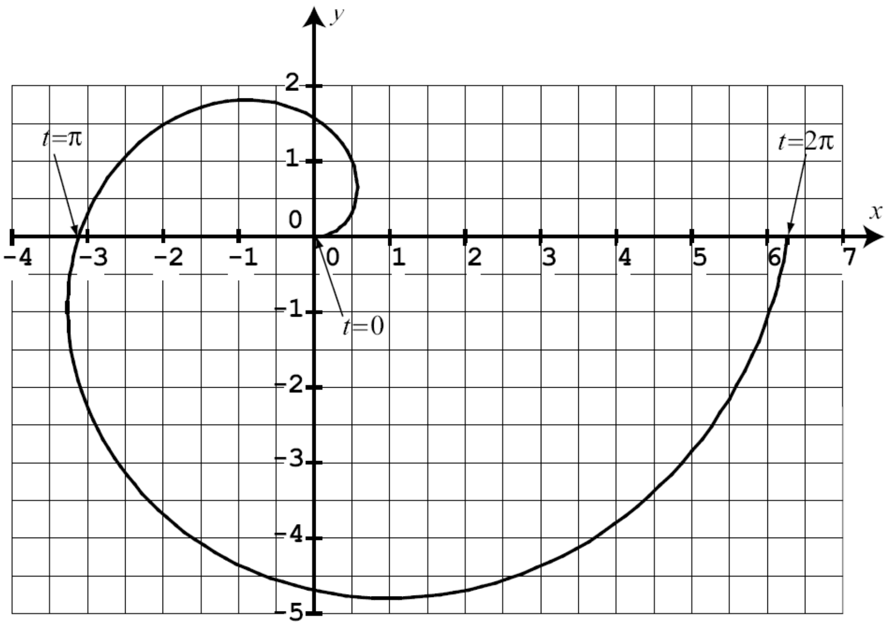
Nature du mouvement pour :

- $0 \leq t \leq 5\,s$: _______________
- $5 \leq t \leq 17\,s$: _______________
- $17 \leq t \leq 25\,s$: _______________

5. Équations paramétriques d'un mouvement

Les équations paramétriques d'une courbe plane décrite par une particule en mouvement sont :

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$$ où t varie de 0 à 2π (t en secondes, x et y en mètres, angles en radians).



a. Déterminer les composantes $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ de la particule ; en déduire son module v.

b. Déterminer les composantes $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération $\vec{a}$ de la particule ; en déduire son module a.

c. Représenter sur la figure ci-dessus les vecteurs vitesse et accélération de la particule aux instants $t = 0$ et $t = \pi\ s$. On prendra comme échelles :

- pour les vitesses : $1\,cm \leftrightarrow 1\,m.s^{-1}$
- pour les accélérations : $1\,cm \leftrightarrow 1\,m.s^{-2}$.

Justification (un tracé sans justification ne comptera pas) :

d. Déterminer les composantes normale $a_n(t)$ et tangentielle $a_t(t)$ de l'accélération dans un repère de Frenet $\left(M, \overrightarrow{e_t}, \overrightarrow{e_n}\right)$.

e. En déduire l'expression du rayon de courbure de la trajectoire.