EXAMEN FINAL PS20
mercredi 15 janvier 2014 – site de Sevenans

Consignes

- Durée : 2 heures
- Aucun document admis – calculatrice admise
- Les explications intermédiaires sont nécessaires
- Le candidat prendra le soin de référencer correctement les différents exercices
- La présentation (rédaction, propreté, etc.) sera prise en compte dans la notation (1 point BONUS)

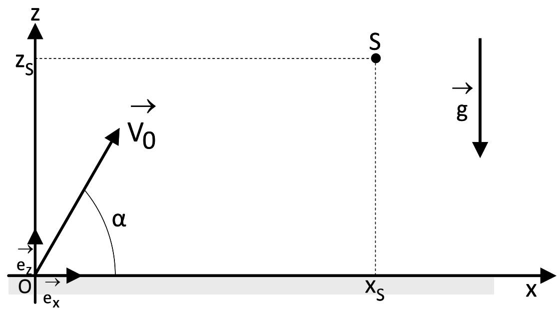
Exercice n°1 : mise en bouche (4 points)

(+1 point par bonne réponse, -0,5 point par mauvaise réponse, 0 point pour absence de réponse)

- Un mouvement est uniforme si :
  - ☐ Sa vitesse est constante.
  - ☐ Son vecteur vitesse est constant.
  - ☐ Son vecteur accélération est constant.
  - ☐ Son accélération est nulle.
  - ☐ Aucune réponse n'est correcte.
- 2. Un mouvement est uniformément décéléré si :
  - ☐ La valeur algébrique de l'accélération tangentielle est constante.
  - ☐ La valeur algébrique de l'accélération normale est constante.
  - ☐ $\vec{a}\,.\,\vec{v} < 0$.
  - ☐ $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.
  - ☐ Aucune réponse n'est correcte.
- 3. Le trièdre de Frénet est composé des trois vecteurs $\overrightarrow{e_N}$, $\overrightarrow{e_T}$ et $\overrightarrow{e_B}$, tels que
  - ☐ $(\overrightarrow{e_N}, \overrightarrow{e_T}, \overrightarrow{e_B})$ est une base orthonormée directe.
  - ☐ $(\overrightarrow{e_B}, \overrightarrow{e_N}, \overrightarrow{e_T})$ est une base orthonormée directe.
  - ☐ $(\overrightarrow{e_T}, \overrightarrow{e_N}, \overrightarrow{e_B})$ est une base orthonormée directe.
  - ☐ $(\overrightarrow{e_T}, \overrightarrow{e_B}, \overrightarrow{e_N})$ en est une base orthonormée directe.
  - ☐ Aucune réponse n'est correcte.
- 4. Le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_N}$ est :
  - ☐ Constant.
  - ☐ Dirigé vers la concavité.
  - ☐ Dirigé vers l'extérieur de la trajectoire.
  - ☐ Garde une direction fixe.
  - ☐ Aucune réponse n'est correcte.

Exercice n°2 : balistique (environ 6 points)

A l'instant t = 0, une particule ponctuelle M est lancée du point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ située dans le plan xOz et faisant avec l'horizontale (axe Ox) un angle α > 0 pouvant être ajusté (entre 0 et π/2). Le mouvement de ce point est étudié dans le référentiel cartésien$(R, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ et son accélération est constante : $\vec{a} = -g \times \overrightarrow{e_z}$.



Q1) Exprimer dans la base cartésienne les composantes du vecteur vitesse à l'instant t puis les équations horaires du mouvement.

Q2) En déduire l'équation de la trajectoire de M et préciser la nature de celle-ci.

Q3) A quel instant t_s le sommet S de cette trajectoire est atteint ? Quelles sont ses coordonnées x_s et z_s ?

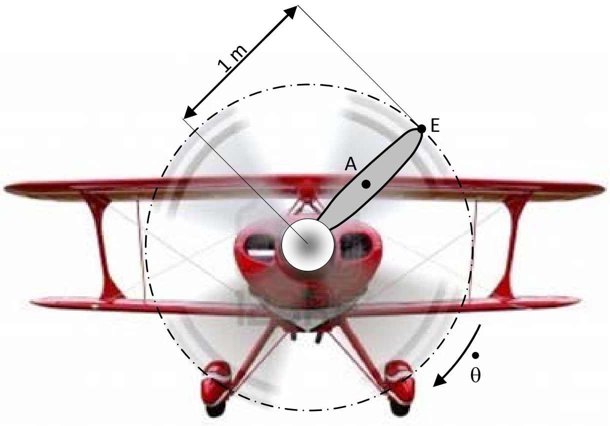
Q4) Quelle est la portée OP du projectile, c'est-à-dire le point P où la trajectoire coupe l'axe Ox. A quel instant t_P ce point est-il atteint ? Quelle est la norme du vecteur vitesse en P (V_P) ?

Q5) A V_0 fixé, quelle est la portée maximale ? De quoi dépend-elle ?

Q6) Pourquoi (sans calcul) existe-t-il deux valeurs de α pour lesquelles le projectile atteint la même portée ?

DONNEES) $\sin(2\alpha) = 2 \times \sin\alpha \times \cos\alpha$ et $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$

Exercice n°3 : accélération sur une hélice d'un avion (environ 6 points)



L'extrémité E d'une pale d'hélice d'un avion de rayon R = 1 m (voir ci-contre) ne doit pas dépasser la vitesse tangentielle de 340 $m.s^{-1}$ en vue d'éviter sa dégradation.
On considère deux points sur cette pale : l'extrémité (point E) et le milieu de la pale (point A).

<u>Hélice au régime nominal : on considère ici le moteur en fonctionnement à régime constant</u>

Q1) Exprimer la vitesse angulaire du point E et calculer sa valeur numérique.
Q2) Exprimer la vitesse tangentielle du point A et calculer sa valeur numérique.
Q3) Exprimer le module de l'accélération normale (notée a_N) subie par l'extrémité E de l'hélice et calculer sa valeur numérique.

<u>Arrêt de l'hélice de l'avion : on coupe le moteur de l'avion et l'hélice continue de tourner durant 3 s avant son arrêt</u>

Q4) Déterminer les équations horaires de la position angulaire, de la vitesse angulaire et de l'accélération angulaire de l'extrémité de l'hélice. On considère au moment de l'arrêt du moteur (à t=0 s) la position angulaire suivante : θ_E=0 rad. En déduire, au moyen d'applications numériques, le nombre de tours (exprimé en tours) que l'hélice effectue entre l'extinction du moteur et l'arrêt de l'hélice 3 s après.
Q5) Exprimer les accélérations normales et tangentielles subies par l'extrémité de l'hélice 2 secondes après l'extinction du moteur et calculer leur valeur numérique.
Q6) Démontrer que la norme de l'accélération de l'extrémité de l'hélice 2 secondes après l'extinction du moteur dépasse 10000 $m.s^{-2}$ (vous avez bien lu : 10000).

Exercice n°4 : attraction (environ 4 points)

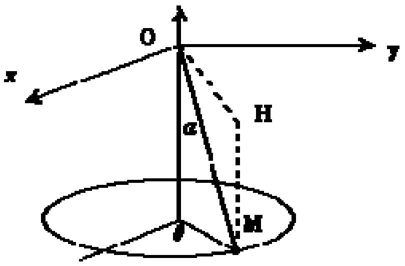
NB. Dans tout le problème, on négligera les forces de gravitation.

Dans un plan xOy, un point M de masse m est soumis de la part de l'origine O à une force d'attraction $\overrightarrow{F_1(M)}$ de norme proportionnelle à la distance OM. Le coefficient de proportionnalité est égale à : $m\times\omega_0^2$.

Q1) Donner l'expression vectorielle de $\overrightarrow{F_1(M)}$ dans le repère cartésien et déterminer les équations différentielles du mouvement de M suivant x et suivant y. Résoudre ces équations sachant que l'équation différentielle de forme $y''+\omega^2 y=0$ (où ω est un réel) admet pour solution : f(x)=A cos(ωx) + B sin(ωx)
Q2) Déterminer les constantes A, B, C et D en considérant, comme conditions initiales :

- la vitesse du point M à t = 0 est $\overrightarrow{V_0}$ (0, a ω_0), où a est une constant positive,
- le point M à t = 0 est en P de coordonnées (0,a), où a est une constant positive

Exercice BONUS (environ 3 points)



L'extrémité O d'un fil OM de masse négligeable et de longueur ℓ est fixée. Un objet ponctuel de masse m est suspendu en M. L'objet est alors écarté de la verticale d'un angle α de la verticale puis lancé.
Q1) Par application de la relation fondamentale de la dynamique, déterminer la vitesse initiale qu'il faut communiquer à M pour qu'il décrive des cercles horizontaux.