Exercice 1 : Considérons le systèmes de suites récurrentes suivant :

$$\begin{cases} U_{n+1} &= 3U_n + V_n \\ V_{n+1} &= 2U_n + 2V_n \end{cases}$$

avec les conditions initiales $U_0 = 1$ et $V_0 = 1$. Pour n entier naturel, on définit le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$ de sorte que

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}}_{X_n}$$

On en déduit que :

$$X_{n+1} = A\ X_n; \qquad X_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent :

$$X_n = A^n X_0$$

Objectif : L'objectif de l'exercice est de trouver l'expression de U_n et V_n en fonction de n.

2 points 1. Calculer le polynôme caractéristique $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ et déterminer les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2$ de A.

1 point 2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

4 points 3. Déterminer les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} associés aux valeurs propres ainsi que leurs bases propres e_1 et e_2. On veillera à ce que les composantes de e_1 et e_2 soient des entiers relatifs.

2 points 4. Dans la suite on prendra $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Fournir la matrice de passage P de la base canonique à la base propre.

2 points 5. Calculer P^{-1}.

1 point 6. Quelles sont les valeurs propres de A^n.

2 points 7. Calculer A^n en fonction de n.

2 points 8. En déduire U_n et V_n en fonction de n.

Exercice 2 : (4 points) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}, \qquad b \neq 0$$

Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?