Exercice 1 : Considérons le système de suites récurrentes suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_{n+1}} & = \boldsymbol{2U_n + V_n} \\ \boldsymbol{V_{n+1}} & = \boldsymbol{-3U_n - 2V_n} \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\boldsymbol{U_0 = 0}$ et $\boldsymbol{V_0 = 1}$. Pour $\boldsymbol{n}$ entier naturel, on définit le vecteur $\boldsymbol{X_n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U_n} \\ \boldsymbol{V_n} \end{pmatrix}$

Objectif : L'objectif de l'exercice est de trouver l'expression de $\boldsymbol{U_n}$ et $\boldsymbol{V_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

1 point 1. Montrer que $\boldsymbol{X_{n+1} = A\ X_n}$, où $\boldsymbol{A}$ est une matrice que l'on déterminera.

1 point 2. Démontrer par récurrence la relation $\boldsymbol{X_n = A^n X_0}$.

2 points 3. Calculer le polynôme caractéristique $\boldsymbol{p(\lambda) = det(A - \lambda I)}$ et déterminer les valeurs propres $\boldsymbol{\lambda_1 < \lambda_2}$ de $\boldsymbol{A}$.

1 point 4. La matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable ?

2 points 5. Déterminer les sous-espaces propres $\boldsymbol{E_{\lambda_1}}$ et $\boldsymbol{E_{\lambda_2}}$ associés aux valeurs propres ainsi que leurs bases propres $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$. On veillera à ce que les composantes de $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ soient des entiers relatifs.

2 points 6. Dans la suite on prendra $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda_2} \end{pmatrix}$. Fournir la matrice de passage $\boldsymbol{P}$ de la base canonique à la base propre.

2 points 7. Calculer $\boldsymbol{P^{-1}}$.

1 point 8. Quelles sont les valeurs propres de $\boldsymbol{A^n}$.

2 points 9. Calculer $\boldsymbol{A^n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

2 points 10. En déduire $\boldsymbol{U_n}$ et $\boldsymbol{V_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

Exercice 2 : (4 points) Soit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{y - 4} & \boldsymbol{2x} \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ la matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable ?