

Sur la diagonalisation des matrices

Exercice 1 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y-4 & 2x \end{pmatrix}; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Pour quelles valeurs de x et y la matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 2 : Considérons la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2$ de A .
2. Dans la suite on prendra $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Fournir la matrice de passage P de la base canonique à la base propre. On veillera à ce que les composantes des vecteurs propres e_1 et e_2 soient des entiers relatifs.
3. Calculer P^{-1} .
4. Calculer A^n en fonction de n .

Sur le Développement Limité.

Question 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0 telle que $f(0) = 0$ et $DL_4(0)$ de f est $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + o(x^4)$. Déterminer la valeur de $f''(0)$.

Question 2 : Soit $f(x) = \frac{1}{2+x}$. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 en $x = 0$.

Question 3 : Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = e^x$ à l'ordre 3 en 1.

Question 4 : Calculer les limites suivantes

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 3}{x^2}$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$$

Exercice 3 :

Une start-up conçoit un petit jeu gratuit pour smartphones. Dans ce jeu, un personnage est généré à chaque début de partie avec un équipement choisi dans une liste de **40** objets, vêtements et accessoires, qui sont numérotés de **0** à **39**.

Le concepteur du jeu envisage différents algorithmes pour attribuer automatiquement ces objets à chaque début de partie. Le but de cet exercice est d'étudier certains d'entre eux.

1. Le concepteur du jeu envisage d'attribuer les objets à chaque début de partie en parcourant la liste de leurs numéros par des sauts d'amplitude constante a , où a est un nombre entier strictement positif :
 - lors de la première partie, le personnage se voit attribuer l'objet numéro **0**;

- pour obtenir le numéro de l'objet à partir de la deuxième partie, on ajoute a au numéro précédent et on calcule le reste de cette somme dans la division euclidienne par 40 . Le reste obtenu est alors le numéro attribué à l'objet.
- (a) Donner la liste des numéros des objets attribués lors des **11** premières parties, pour une amplitude de saut égale à **12**.
- (b) Ce choix d'amplitude permet-il d'utiliser tous les objets au cours des parties successives? Justifier votre réponse.

2. On admet le résultat suivant :

Le nombre a choisi permet de former une liste complète comportant tous les numéros de 0 à 39 dans le cas où le PGCD de 40 et de a est égal à 1 , et dans ce cas seulement.

Donner la liste de tous les entiers a compris entre **1** et **39** pour lesquels, au cours des parties successives, tous les objets seront utilisés.