Sur la diagonalisation des matrices

Exercice 1 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4+a & 5+a \\ a & a \end{pmatrix}; \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 : Considérons la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2$ de A.
2. Dans la suite on prendra $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Fournir la matrice de passage P. On veillera à ce que les composantes des vecteurs propres e_1 et e_2 soient des entiers.
3. Calculer P^{-1}.
4. Calculer A^n en fonction de n.

Sur les séries

Exercice 3 : Etudier la nature des séries de termes généraux suivantes :

☐ $\sum u_n = \frac{n+1}{n+2}$

☐ $\sum u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

☐ $\sum u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

☐ $\sum u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

Sur le Développement Limité

Exercice 4 : Déterminer les limites suivantes :

☐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

☐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$

☐ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos(x)\right)^{\frac{1}{x^2}}$

☐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}$

Rappel

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\dots\dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\dots\dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots\dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p} \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$