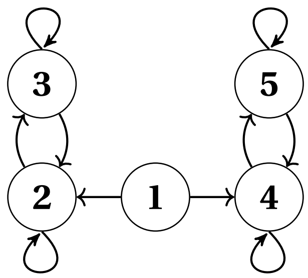
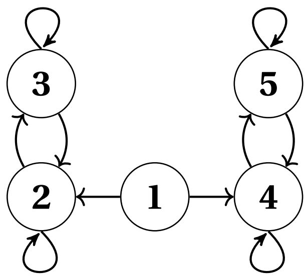
Certaines questions de l'examen sont à choix multiples. Pour chaque question, des réponses sont proposées, une seule est exacte. Il faut cocher la bonne réponse. Une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

Exercice 1 **5 points**

Cet exercice envisage un problème relatif à l'équipement d'une salle informatique d'une entreprise. La salle informatique doit comprendre cinq postes numérotés de **1** à **5** et branchés en réseau selon le graphe G orienté ci-contre.



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe en prenant les numéros des postes dans l'ordre croissant. **1 pt**
2. Complétez le graphe suivant pour obtenir la fermeture transitive de G en traçant les nouveaux arcs d'une couleur distincte. **1 pt**



3. En déduire la matrice $\hat{M}$ de la fermeture transitive de ce graphe. **1 pt**
4. Quelles sont les postes du réseau qui sont accessibles depuis les postes **3** et **4** en quelques clics ? Justifier. **1 pt**
5. Interpréter les valeurs de la première colonne de $\hat{M}$ dans le contexte de l'énoncé. **1 pt**

Exercice 2 **10 points**

Partie A

Un jury de concours doit établir l'ordre de passage des **2014** candidats qui doivent passer une épreuve orale. Le président du jury envisage la procédure automatique décrite ci-après.

Tout d'abord, il classe les **2014** candidats par ordre alphabétique et attribue à chacun, en suivant cet ordre, un numéro allant de **1** à **2014**. Ainsi, pour définir un ordre de passage à l'oral des candidats il suffit de dresser la liste des numéros des candidats qui seront appelés l'un après l'autre à passer l'épreuve orale.

Pour établir cette liste, le président du jury choisit un entier n compris entre **1** et **400**, puis procède de la manière suivante :

- le premier numéro inscrit sur la liste est le nombre n ;
- le deuxième numéro inscrit sur la liste est le nombre $2n$;
- le troisième numéro inscrit est le nombre $3n$;
- de façon générale, pour obtenir chaque numéro inscrit à partir du deuxième, on ajoute n au numéro précédent et :
  - — si la somme S obtenue est inférieure ou égale à **2014**, le numéro inscrit est égal à cette somme S ;
  - — sinon, le numéro inscrit est égal à $S - 2014$.

Par exemple, en choisissant la valeur $n = 257$, les premiers numéros inscrits sur la liste sont, dans l'ordre :

257–514–771–1028–1285–1542–1799–42–299–556–$\cdots\cdots$–etc.

En effet :

- le premier numéro inscrit est $n = 257$;
- du **2**e numéro (égal à **514**) au **7**e numéro (égal à **1799**), on a ajouté **257** au numéro précédent puisque la somme ne dépassait pas **2014** ;
- le **8**e numéro inscrit est le numéro **42** car $1799 + 257 = 2056$ et, comme **2056** dépasse **2014**, le numéro à inscrire est $2056 - 2014 = 42$.

Ainsi le candidat **257** passera en premier l'oral ; il sera suivi du candidat **514** et ainsi de suite.
Le président du jury se demande si cette procédure permet de convoquer tous les candidats, c'est-à-dire si la liste obtenue, en **2014** étapes, contient tous les nombres de **1** à **2014**.

1. Dans cette question, le président du jury choisit $n = 212$.
   (a) Les **9** premiers numéros inscrits sont donc :

   212–424–636–848–1060–1272–1484–1696–1908.

   Donner la liste des **15** numéros suivants. **1 pt**

   (b) La valeur $n = 212$ permet-elle de convoquer tous les candidats ? **1 pt**

   (c) Avec cette valeur de n, combien de numéros différents la liste comporte-t-elle ? **1 pt**

2. Dans cette question, le président du jury choisit $n = 38$.
   Déterminer combien de numéros différents comporte la liste. Justifier la réponse. **2 pts**

Partie B

D'après la partie A, il apparaît que, pour certaines valeurs de n, la procédure utilisée ne permet pas de convoquer tous les candidats, c'est-à-dire de constituer une liste comportant tous les nombres de 1 à 2014.

On admet le résultat suivant :

« Le nombre n choisi permet de former une liste complète comportant tous les numéros de 1 à 2014 sont les entiers n compris entre 1 et 400 qui sont premiers avec 2014, et dans ce cas seulement ».

1. Si $n = 15$, la procédure utilisée permet-elle de convoquer tous les candidats? **1 pt**
2. Dans cette question, on cherche à déterminer le nombre d'entiers n, parmi ceux compris entre 1 et 400, qui permettent par la procédure utilisée de convoquer tous les candidats.
   (a) Décomposer le nombre 2014 en produit de facteurs premiers. **1 pt**
   (b) En déduire le nombre d'entiers n qui permettent de convoquer tous les candidats. **3 pts**

Exercice 3 **5 points**

Question 1 : (1 point) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0 telle que $f(0) = 0$ et $DL_4(0)$ de f est $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + o(x^4)$. Cocher la bonne réponse.

☐ $f''(0) = \frac{1}{2}$

☐ $f''(0) = 1$

☐ $f(2x) = 2x + x^2 + 2x^3 + o(x^4)$

☐ Aucune des propositions précédentes n'est valable

Question 2 : (1 point) Soit $f(x) = \frac{1}{2+x}$. Cocher la bonne réponse.

☐ $DL_2(0)$ $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$

☐ $DL_2(0)$ $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

☐ $DL_2(0)$ $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

☐ Aucune des propositions précédentes n'est valable

Question 3 : (1 point) Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = e^x$ à l'ordre 3 en 1.

Question 4 : (2 points) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$