toute documentation permise sauf les ouvrages.

Problème : diagnostic de biodégradation en rivière (13 points)

Dans les milieux aquatiques, la décomposition microbienne de la matière organique joue un rôle important dans les processus de transformation de masse et d'énergie. Des rejets d'eau chargée en matière organique provoquent dans le milieu récepteur une consommation d'oxygène pouvant aller jusqu'à l'anoxie, soit par oxydation par voie chimique de polluants réducteurs, soit à cause du métabolisme des micro-organismes qui modifient la structure de la matière organique et la consomment. Ce phénomène est appelé biodégradation et la première approche de la biodégradation en rivière conduit au diagnostic de l'information contenu dans l'eau afin d'obtenir des informations précieuses sur la qualité de l'eau du milieu.

Deux paramètres sont essentiels pour le diagnostic : la demande biologique en oxygène $\boldsymbol{x_1}$, censée représenter la matière organique, et l'oxygène dissous $\boldsymbol{x_2}$, paramètre fondamental dans la description de la qualité de l'eau du milieu. Dans des conditions normales, le modèle dynamique en temps discret de la biodégradation en rivière est le suivant :

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0.9x_1(k) - 0.01x_2(k) + 0.1u(k) \\ x_2(k+1) &= 0.02x_1(k) + 0.99x_2(k) \\ y(k) &= x_2(k) \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{u}$ représente la demande en oxygène à saturation.

1. (3 points) En posant $\boldsymbol{x} = \binom{x_1}{x_2}$, écrire le modèle du système sous la forme :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

   où $\boldsymbol{A, B, C}$ sont des matrices que l'on déterminera.

2. (3 points) Ecrire l'équation $\boldsymbol{r}$ d'auto-redondance associée à la mesure $\boldsymbol{x_2}$.

3. On sait que la caractéristique essentielle du résidu $\boldsymbol{r}$ est sa sensibilité aux changements de la qualité de l'eau. En régime normal, il est statistiquement nul et s'écarte notablement de zéro en présence de polluants réducteurs. C'est ce qualificatif *notablement* qu'il convient maintenant de préciser sur la base de considérations statistiques visant à affirmer ou infirmer que le résidu $\boldsymbol{r}$ est nul.

   Dans la suite on suppose que $\boldsymbol{r}$ suit une loi de Poisson de paramètre (moyenne) $\boldsymbol{\lambda}$. On rappelle que la loi de poisson est donnée par :

$$p(r) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$$

   Ainsi, l'absence de polluants réducteurs correspond à une moyenne $\boldsymbol{\lambda_0}$ alors qu'on cas de présence de polluants la moyenne de $\boldsymbol{r}$ vaut $\boldsymbol{\lambda_1}$. Afin de détecter la présence de polluants, nous allons réaliser le test de Bayes. A partir de N échantillons de r pris à différent endroits, on distingue les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} H_0 &: r \text{ est de moyenne } \lambda_0 \\ H_1 &: r \text{ est de moyenne } \lambda_1 \end{aligned}$$

Dans toute la suite on suppose que les échantillons r_j sont des entiers.

(a) (3 points) Calculer le rapport de vraisemblance Θ_j pour la j-ième observation r_j.

(b) (3 points) On suppose que les observations sont indépendantes. Calculer alors le rapport de vraisemblance Λ_N après N observations.

(c) (1 point) Expliquer brièvement comment peut-on détecter des polluants.

Exercice (7 points)

Soit le système discret suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$ et $y \in \mathbb{R}^2$. Dans cette exercice, on souhaite générer les équations d'auto-redondance ne faisant pas intervenir l'une des deux commandes. Intéressons-nous à l'élimination de $u_2(k)$. Le système peut être réécrit de façon à isoler l'entrée que l'on souhaite éliminer :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1u_1(k) + B_2u_2(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

Montrer comment on peut regrouper les grandeurs que l'on souhaite éliminer, $x(k)$, $u_2(k)$, pour cet objectif.