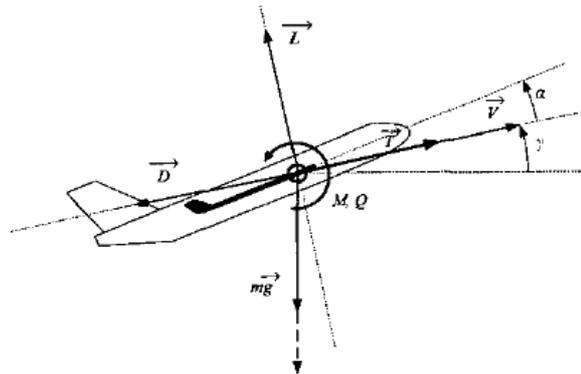


toute documentation permise sauf les ouvrages.

### Problème : Détection de pannes de capteurs d'avion

Le diagnostic de pannes de capteurs d'avion se prête bien à l'utilisation des techniques de redondance analytique dans la mesure où d'une part les modèles d'avions sont relativement bien connus et, d'autre part, les calculateurs de bord utilisés pour le pilotage peuvent prendre en charge ces procédures de détection, ce qui entraînera des gains de coût et de poids appréciables.



**Modèle de l'avion :** La plupart des avions sont bien approximés comme des corps rigides sur lesquels agissent des forces propulsives, gravitationnelles et aérodynamiques. Le mouvement peut alors être décrit par la position et la vitesse du centre de gravité ainsi que par l'orientation et la vitesse angulaire d'un ensemble d'axes liés à l'avion par rapport à des axes de référence. Dans ce cadre de travail et sous certaines hypothèses simplificatrices, les équations du mouvement peuvent être simplifiées et découplées en équations du mouvement longitudinal et équations du mouvement latéral. Les paramètres fondamentaux du mouvement longitudinal sont présentés sur la figure et peuvent être commandés par la poussée  $T$  et la position des ailerons arrière  $\delta(k)$ .  $D$ ,  $L$  et  $M$  représentent les forces et le moment aérodynamiques,  $m$  la masse ;  $V$  la vitesse de l'avion,  $\alpha$  et  $\gamma$  les angles d'incidence et de pente,  $Q$  la vitesse de rotation.

En atmosphère perturbée, le modèle dynamique linéaire en temps discret autour d'un point de fonctionnement s'écrit :

$$\begin{aligned} V(k+1) &= a_1 V(k) + b_1 T(k) \\ \alpha(k+1) &= a_2 \alpha(k) + b_2 \delta(k) \\ \gamma(k+1) &= a_3 V(k) + a_4 \alpha(k) + a_5 \gamma(k) \end{aligned}$$

Les variables mesurées sont  $V(k)$ ;  $\alpha(k)$ ;  $\gamma(k)$ .

- (3 points) En posant  $x(k) = [V(k), \alpha(k), \gamma(k)]$  et  $u(k) = [T(k), \delta(k)]$  écrire le modèle du système sous la forme :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  sont des matrices que l'on déterminera.

2. (3 points) Écrire les équations  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  d'auto-redondance associées aux mesures  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$ .
3. (2 points) Pour une exploitation en temps réel des résidus, quelles doivent être les expressions de  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  ?

**Analyse de  $\mathbf{r}_1$  :** Il convient maintenant de préciser sur la base de considérations statistiques visant à affirmer ou infirmer que le résidu  $\mathbf{r}_1$  est nul. L'algorithme du contrôle (**Test de Wald**) doit être capable de détecter toute panne qui cause une erreur dans le délai permis en satisfaisant les probabilités de fausse alarme et de non détection exigées.

Dans la suite on suppose que  $\mathbf{r}_1$  suit une loi de Gauss. Le fonctionnement normal correspond à une moyenne  $\boldsymbol{\mu}_0$  et de variance  $\boldsymbol{\sigma}^2$ . Une défaillance se caractérise par une moyenne  $\boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}$  et une variance  $\boldsymbol{\sigma}^2$ . On distingue alors les hypothèses suivantes :

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{r}_1 \text{ est de moyenne } \boldsymbol{\mu}_0 \text{ et de variance } \boldsymbol{\sigma}^2$$

$$\mathbf{H}_1 : \mathbf{r}_1 \text{ est de moyenne } \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu} \text{ et de variance } \boldsymbol{\sigma}^2$$

1. (2 points) On suppose que les observations sont indépendantes. Montrer alors que le rapport de vraisemblance  $\Lambda_k$  après  $k$  observations s'écrit comme :

$$\Lambda_k = \exp \left[ -k \frac{\boldsymbol{\mu}^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2} + \frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}^2} \sum_{j=1}^k (r_j - \boldsymbol{\mu}_0) \right]$$

2. Dans cette question on suppose que  $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\mu}$  est de signe quelconque (c-à-d,  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^*$  ou  $\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\mu}^*$  avec  $\boldsymbol{\mu}^* > \mathbf{0}$ ).

- (a) (2 points) Montrer que la plage de non décision du test de Wald se ramène à :

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{\boldsymbol{\mu}^*} \ln(\mathbf{A}) + \frac{k\boldsymbol{\mu}^*}{2} < \left| \sum_{j=1}^k r_j \right| < \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{\boldsymbol{\mu}^*} \ln(\mathbf{B}) + \frac{k\boldsymbol{\mu}^*}{2}$$

- (b) (3 points) Quel est le nombre d'observations nécessaires pour pouvoir se prononcer pour un fonctionnement sans panne ?
- (c) (2 points) Quel est l'effet d'une variance faible sur le test ?
- (d) (3 points) Posons

$$f(k) = \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{\boldsymbol{\mu}^*} \ln(\mathbf{A}) + \frac{k\boldsymbol{\mu}^*}{2}$$

$$g(k) = \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{\boldsymbol{\mu}^*} \ln(\mathbf{B}) + \frac{k\boldsymbol{\mu}^*}{2}$$

et supposons que  $\mathbf{B} > \mathbf{1}$  et  $\mathbf{A} < \mathbf{1}$ . Montrer approximativement sur un graphe les plages de décision et non décision du test de Wald. Il faudra prendre en compte la question (b).