toute documentation permise sauf les ouvrages.

Exercice 1

Soit le système discret suivant :

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + u_1(k) \\
x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + u_2(k) \\
x_3(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + u_1(k) + u_2(k)
\end{aligned}$$

Les variables mesurées sont $x_1(k), x_2(k), x_3(k)$

1. (1 point) En posant $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ et $u = (u_1, u_2)^T$, écrire le modèle du système sous la forme :

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
y(k) &= Cx(k)
\end{aligned}$$

   où A, B, C sont des matrices que l'on déterminera.
2. (3 points) Etablire les équations d'auto-redondance associées à y_1 et y_2.
3. (2 points) Etablire l'équation d'inter-redondance reliant y_1 et y_2.

Exercice 2

Test de Wald des équipements électroniques pour l'atterrissage des avions : Les équipements électroniques d'atterrissage des avions sont de deux sortes :

- **le localizer :** situé en extrémité de la piste d'atterrissage d'un aéroport et qui sert à déterminer un plan vertical ;
- **le Glide-path** situé sur le côté droit de la piste. Il sert à déterminer une surface courbe. L'intersection du plan et de la surface courbe constitue le rail électronique le long duquel l'avion doit évoluer pour son atterrissage.

Ces équipements étant utilisés pour guider l'avion par des conditions de visibilité réduite (le pilote ne voyant pas la piste jusqu'à une distance pouvant être très faible), la disponibilité du signal pendant la phase d'approche et d'atterrissage doit être de haut niveau. Les interruptions d'émission ne doivent pas dépasser une certaine probabilité d'émergence réglementaire. Ces éventuelles interruptions d'émission sont qualifiées d'outages et l'on parle de temps moyen entre deux outages.

Si on note $x_1, \cdots, x_k$ la suite des temps de bon fonctionnement entre deux outages, les variables x_j sont alors considérées comme indépendantes et de même densité de probabilité exponentielle de moyenne θ :

$$p(x_j) = \frac{1}{\theta} \exp(-\frac{x_j}{\theta})$$

On désire tester les hypothèses suivantes :

$\boldsymbol{H_0 : x_j}$ est de moyenne $\boldsymbol{\theta_0}$; Fonctionnement normal des équipements

$\boldsymbol{H_1 : x_j}$ est de moyenne $\boldsymbol{\theta_1 < \theta_0}$; Fonctionnement défectueux des équipements

1. (1 point) Montrer que le rapport de vraisemblance $\boldsymbol{\Lambda_k}$ après $\boldsymbol{k}$ outages s'écrit comme :

$$\Lambda_k = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^k \exp\left[-\sum_{j=1}^{k} x_j \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\right]$$

Dans toute la suite, on pose $\boldsymbol{T = \sum_{j=1}^{k} x_j}$, $\quad \boldsymbol{d = \frac{\theta_0}{\theta_1}}$, $\quad \boldsymbol{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} = \alpha}$

2. Dans cette question on s'interesse au diagnostic par rapport à $\boldsymbol{T}$.
   (a) (1 point) Donner une interprétation à $\boldsymbol{T}$.
   (b) (1 point) Montrer que la plage de non décision correspond à :

   $$F(k) < T < G(k)$$

   où $\boldsymbol{F(k), G(k)}$ sont des fonction de $\boldsymbol{k}$ que l'on déterminera.
   (c) (1 point) Quel est le nombre d'outages nécessaire pour pouvoir se prononcer pour un fonctionnement défectueux ?
   (d) (2 points) Quel est votre diagnostic dans ce cas par rapport à $\boldsymbol{T}$?
3. Dans cette question on s'interesse au diagnostic par rapport au nombre d'outages $\boldsymbol{k}$.
   (a) (1 point) Montrer que la plage de non décision correspond aussi à :

   $$H(T) < k < L(T)$$

   où $\boldsymbol{H(T), G(T)}$ sont des fonction de $\boldsymbol{T}$ que l'on déterminera.
   (b) (2 points) Quelle relation doit vérifier $\boldsymbol{T}$ pour pouvoir se prononcer pour un fonctionnement normal ?
   (c) (5 points) Pour des raisons de sécurité on se fixe un temps $\boldsymbol{t^*}$ au delà duquel le test ne doit pas continuer ainsi qu'un nombre $\boldsymbol{k^*}$ d'outages qui ne doit pas être dépassé. Le test de Wald est complété alors par :
   – On accepte $\boldsymbol{H_0}$ si te temps $\boldsymbol{t^*}$ s'est écoulé sans atteindre $\boldsymbol{k^*}$ outages,
   – On accepte $\boldsymbol{H_1}$ si $\boldsymbol{k^*}$ outages se sont produits pendant une durée inférieure à $\boldsymbol{t^*}$.
   Montrer sur un graphe donnant le nombre d'outages en fonction du temps, les plages de décision et de non décision en incorporant $\boldsymbol{t^*}$ et $\boldsymbol{k^*}$.