

toute documentation permise sauf les ouvrages et la calculatrice.

Exercice 1 (15 points)

Soit le système discret suivant :

$$x_1(k+1) = -x_2(k) + u(k)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) - x_2(k)$$

La variable mesurée est $x_2(k)$.

(1pts) 1) En posant $x = (x_1, x_2)^T$, écrire le modèle du système sous la forme :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

où A, B, C sont des matrices que l'on déterminera.

(2pts) 2) Etablir l'équation d'auto-redondance $r(k)$ associée à y .

On souhaite maintenant appliquer le **Test de Wald** pour affirmer ou infirmer que le résidu $r(k)$ est nul. Si on note r_1, \dots, r_k la suite des observatins, les variables r_j sont alors considérées comme indépendantes et de même densité de probabilité (que nous appellerons "densité promo-2009") de moyenne θ :

$$p(r_j) = \theta^{r_j} (1 - \theta)^{1-r_j}$$

On désire tester les hypothèses suivantes :

H_0 : r_j est de moyenne θ_0 ; Fonctionnement normal

H_1 : r_j est de moyenne θ_1 ; Fonctionnement défectueux

(1pts) 3) Montrer que le rapport de vraisemblance $\ln(\Lambda_k)$ après k observations s'écrit comme :

$$\ln(\Lambda_k) = \ln \left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right) \sum_{j=1}^k r_j + k \ln \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} \right)$$

Dans toute la suite, on pose $T = \sum_{j=1}^k r_j$, $d = \frac{\theta_1}{\theta_0}$, $\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} = \alpha$
 et on suppose que $B > 1$ et $A < 1$

4) Dans cette question on s'intéresse au diagnostic par rapport à T .

(a) On suppose dans cette question que $\theta_1 > \theta_0$.

- (1pts) a.i) Montrer que la plage de non décision correspond à :

$$F(k) < T < G(k)$$

où $F(k), G(k)$ sont des fonctions de k que l'on déterminera.

- (2pts) a.ii) Montrer sur un graphe donnant T en fonction de k , les plages de décision et de non décision.

(b) On suppose cette fois-ci que $\theta_1 < \theta_0$.

- (1pts) b.i) Montrer que la plage de non décision correspond à :

$$H(k) < T < L(k)$$

où $H(k), L(k)$ sont des fonctions de k que l'on déterminera.

- (2pts) b.ii) Montrer sur un graphe donnant T en fonction de k , les plages de décision et de non décision.

5) Dans cette question on s'intéresse au diagnostic par rapport au nombre d'observations k . On suppose dans cette question que $\theta_1 > \theta_0$.

- (1pts) (a) Montrer que la plage de non décision correspond à :

$$M(T) < k < N(T)$$

où $M(T), N(T)$ sont des fonctions de T que l'on déterminera.

- (2pts) (b) Quelle relation doit vérifier T pour pouvoir se prononcer pour un fonctionnement défectueux ?

- (2pts) (c) Montrer sur un graphe donnant k en fonction de T , les plages de décision et de non décision.

Exercice (5 points)

Soit le système discret suivant :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

où $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$ et $y \in \mathbb{R}^2$. Dans cette exercice, on souhaite générer les équations d'auto-redondance ne faisant pas intervenir l'une des deux commandes. Intéressons-nous à l'élimination de $u_2(k)$. Le système peut être réécrit de façon à isoler l'entrée que l'on souhaite éliminer :

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1 u_1(k) + B_2 u_2(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Montrer comment peut-on regrouper les grandeurs que l'on souhaite éliminer, $x(k)$, $u_2(k)$, pour cet objectif.