

Problème

Un hélicoptère peut être décomposé en 5 grandes parties qui sont : La partie structure, la partie moteur, la partie hydraulique, la partie rotor et la partie avionique. Dans ce problème, on s'intéressera particulièrement aux équipements avioniques et au diagnostic des défaillances apparaissant sur ses équipements.

La partie avionique est divisée en deux sous-systèmes composés d'équipements appelés LRU (Line replace unit) et SRU (Shop Replace Unit). Ces équipements étant utilisés pour guider l'hélicoptère par des conditions de visibilité réduite (brouillard, pluie, ...), la disponibilité du signal de ces équipements pendant le vol doit être de haut niveau. Les interruptions d'émission ne doivent pas dépasser une certaine probabilité d'urgence réglementaire. Ces éventuelles interruptions d'émission sont nommées break-off.

Si on note x_1, \dots, x_k la suite des temps de bon fonctionnement entre deux break-off, les variables x_j sont alors considérées comme indépendantes et de même densité de probabilité exponentielle de moyenne θ :

$$p(x_j) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x_j}{\theta}\right)$$

On désire appliquer le test de Wald pour tester les hypothèses suivantes :

H_0 : x_j est de moyenne θ_0 ; Fonctionnement normal des équipements

H_1 : x_j est de moyenne $\theta_1 < \theta_0$; Fonctionnement défectueux des équipements

1. (2 points) Montrer que le rapport de vraisemblance Λ_k après k break-off s'écrit comme :

$$\Lambda_k = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^k \exp\left[-\sum_{j=1}^k x_j \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\right]$$

Dans toute la suite, on pose $T = \sum_{j=1}^k x_j$, $d = \frac{\theta_0}{\theta_1}$, $\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} = \alpha$

2. Dans cette question on s'intéresse au diagnostic par rapport à T .

(a) (2 points) Donner une interprétation à T .

(b) (2 points) Montrer que la plage de non décision correspond à :

$$F(k) < T < G(k)$$

où $F(k), G(k)$ sont des fonction de k que l'on déterminera.

(c) (2 points) Quel est le nombre de break-off nécessaire pour pouvoir se prononcer pour un fonctionnement défectueux ?

(d) (2 points) Quel est votre diagnostic dans ce cas par rapport à T ?

3. Dans cette question on s'intéresse au diagnostic par rapport au nombre de break-off k .

(a) (2 points) Montrer que la plage de non décision correspond aussi à :

$$H(T) < k < L(T)$$

où $H(T), G(T)$ sont des fonction de T que l'on déterminera.

(b) (2 points) Quelle relation doit vérifier T pour pouvoir se prononcer pour un fonctionnement normal ?

(c) (6 points) Pour des raisons de sécurité on se fixe un temps t^* au delà duquel le test ne doit pas continuer ainsi qu'un nombre k^* de break-off qui ne doit pas être dépassé. Le test de Wald est complété alors par :

– On accepte H_0 si le temps t^* s'est écoulé sans atteindre k^* break-off,

– On accepte H_1 si k^* break-off se sont produits pendant une durée inférieure à t^* .

Montrer sur un graphe donnant le nombre de break-off en fonction du temps, les plages de décision et de non décision en incorporant t^* et k^* .