Probabilités - statistiques - SQ20

Tronc commun

Final - Printemps 2011

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est conseillée. Les tables de statistiques ainsi qu'une feuille A4 manuscrite de notes personnelles sont les seuls documents autorisés. Les trois exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 (7 points)

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3\,(1-x)^2 & \text{pour } x \in [0\,,1] \\ 0 & \text{pour } x \notin [0\,,1] \end{cases}$$

1. Esquisser la courbe représentative de la fonction f.
2. Montrer que f est une fonction de densité. On notera X une variable aléatoire de densité f.
3. Calculer la fonction de répartition F_X de X et déterminer la valeur de $P\left(-2 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

   Interpréter graphiquement cette valeur à l'aide du tracé de la question **1**.

   On introduit maintenant une nouvelle variable aléatoire Y définie par $Y = -\ln(1-X)$.
4. Étude de la variable Y :
   (a) Montrer que l'évènement $[Y \leqslant y]$ est égal à l'évènement $[X \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-y}]$.
   (b) En déduire que G_Y, la fonction de répartition de Y, vérifie $G_Y(y) = F_X(1 - \mathrm{e}^{-y})$.
   (c) Conclure que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$.
5. Un calcul de l'espérance de X :
   (a) On désigne par f_Y la densité de Y. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{4}$.
   (b) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que, sous réserve d'existence, l'espérance de $g(Y)$ se calcule comme suit : $\displaystyle E(g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y$.

   Montrer que $E(\mathrm{e}^{-Y}) = \dfrac{3}{4}$.
   (c) Déterminer une fonction g telle que $X = g(Y)$ et calculer $E(X)$.

Exercice 2 (6 points)

On a mesuré la quantité totale d'alcool (exprimée en g/l) contenue dans un échantillon de 10 bouteilles de cidre doux du marché. On a obtenu des valeurs $x_1,\ x_2,\ x_3, \dots, x_{10}$ telles que

$$\sum_{k=1}^{10} x_k = 62 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{10} x_k^2 = 388,4124$$

On modélise la quantité d'alcool contenue dans une bouteille, par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, μ et σ^2 étant des paramètres inconnus.

1. Proposer des estimations ponctuelles de μ et de σ^2 à partir de l'échantillon observé.
2. Construire un intervalle de confiance pour la moyenne μ au niveau de confiance de $1-\alpha = 95\%$.
3. Déterminer un intervalle de confiance à 80% de la variance σ^2.
4. (a) Si n désigne la taille d'un grand échantillon ($n > 50$), exprimer en fonction de n, l'amplitude de l'intervalle de confiance de μ au niveau de confiance de 95%.
   (b) On souhaite construire un intervalle de confiance de μ au niveau de confiance 95% ayant une amplitude de 0,2 gramme par litre.
   Quelle doit étre approximativement la taille de l'échantillon ?
   On prendra comme approximation de la variance la valeur estimée dans la question 1.

<u>Exercice 3</u> (7 points)

L'exercice suivant se passe en 2020. Les enseignants de SQ20 et SQ28 ont peut être changé (c'est éventuellement un de vous) ou pas.

1. À l'issue de l'épreuve de SQ20, l'enseignant qui a proposé le sujet, corrige consciencieusement un échantillon de 10 copies afin d'avoir une idée de la qualité du cru 2020 et éventuellement repenser son barème. On suppose que la répartition des notes suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. L'échantillon de 10 copies fournit les valeurs suivantes :

12	10	7	4	15	13	11	17	10	12

   (a) Donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ et l'écart-type σ.
   (b) Au vu de ce premier échantillon l'enseignant voudrait savoir si les étudiants sont exceptionnellement bons ou si par hasard son cours aurait été plus clair. Pour cela il fait un test d'hypothèse au seuil de signification de 95% pour tester $\mu = 9$ (la moyenne habituelle) contre $\mu > 9$. Mettre en place un tel test (vous prendrez soin d'établir H_0 et H_1, la variable de test, le domaine d'acceptation et la décision).
   (c) L'enseignant décide de tester maintenant $H_0 : \mu = 9$ contre $H_1 : \mu = 11$.
   Calculer le risque β (et justifier que $0,5 \leqslant \beta \leqslant 0,55$).

2. En SQ28, pour tester la qualité des copies, l'enseignant joue à Pile ou Face 40 fois. Le nombre de côtés Pile obtenus, divisé par 2, donne la moyenne sur 20 que l'enseignant atteindra à l'issue des corrections en adaptant son barème. La pièce utilisée, qui se transmet de prof de maths en prof de maths depuis au moins 2011, a une probabilité p de donner Pile.
   (a) On note X la loi de probabilité qui modélise la moyenne des copies. À quelle distribution usuelle correspond la variable aléatoire $2\,X$?
   (b) Calculer $E(2X)$ et $V(2X)$ et donner une approximation normale de $2X$ par le théorème central limite.
   (c) La moyenne au final est de 12. Établir un test au niveau de signification de 95% afin de décider si la pièce est bien équilibrée (sous l'hypothèse $H_0 : p = \frac{1}{2}$, on pourra prendre comme variable de test $Z = \dfrac{2X - 20}{\sqrt{10}}$ qu'on approchera par une distribution normale centrée réduite).