Exercice 1

1. À la calculatrice, on obtient : $\overline{x_e} \approx 58,040$ à 10^{-3} près par défaut et $s_e \approx 0,037$ à 10^{-3} près par défaut.

2. On prend $\alpha = 5\,\%$, $n = 81$ et $\mu_0 = 58$. On veut tester :

- $H_0 : \mu = \mu_0$
- contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n de la variable X.

(a) La variable aléatoire $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_0, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

(b) σ étant inconnu, on prend comme variable aléatoire de test $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

où $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$.

On sait alors que Z suit la loi de Student T_{n-1} à $n-1 = 80$ degrés de liberté.

(c) On cherche le réel t tel que $P(-t \leqslant Z \leqslant t) = 0,95$.

Or $P(-t \leqslant Z \leqslant t) = F_Z(t) - F_Z(-t) = F_Z(t) - (1 - F_Z(t))$ car la densité de Z est une fonction paire. Donc

$$P(-t \leqslant Z \leqslant t) = 0,95 \iff 2F_Z(t) - 1 = 0,95$$

$$\iff F_Z(t) = \frac{1,95}{2} \iff F_Z(t) = 0,975$$

On obtient à la calculatrice : $t \approx 1,990$ à 10^{-3} près par défaut.

(d) Comme $P\left(-t \leqslant Z \leqslant t\right) = P\left(\mu_0 - t\dfrac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{X} \leqslant \mu_0 + t\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$,

on obtient comme région d'acceptation D_0 de H_0 au seuil de signification de 5% :

$$D_0 = \left[\mu_0 - t\frac{s_e}{\sqrt{n-1}}\,,\, \mu_0 + t\frac{s_e}{\sqrt{n-1}}\right] \approx [57,992\,;\,58,008]$$

3. Ici, $\overline{x_e} \notin D_0$.

On rejette H_0 et on décide que H_1 est vraie avec un risque de première espèce de 5%.

Exercice 2

Partie A

Pour $\lambda > 0$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} e^{\lambda - t} & \text{si } t \geqslant \lambda \\ 0 & \text{si } t < \lambda \end{cases}$

1. (a) Soit $x \geqslant \lambda$.

$$\int_{\lambda}^{x} f(t)\,dt = \int_{\lambda}^{x} e^{\lambda - t}\,dt = \left[-e^{\lambda - t}\right]_{t=\lambda}^{t=x} = -e^{\lambda - x} - \left(-e^{\lambda - \lambda}\right) = 1 - e^{\lambda - x}$$

(b) f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$ et positive sur $\mathbb{R}$.

De plus $1 - e^{\lambda - x} \underset{(x \to +\infty)}{\longrightarrow} 1$

donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(t)\;dt = \int_{\lambda}^{+\infty} f\,(t)\;dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{\lambda}^{x} f(t)\,dt = 1$$

Ainsi f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. La fonction F de répartition de X est définie pour tout réel x par

$F(x) = P([X \leqslant x]) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f\,(t)\;dt.$

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 & \text{si} \quad x < \lambda \\ \displaystyle\int_{\lambda}^{x} f(t)\,dt = 1 - e^{\lambda - x} & \text{si} \quad x \geqslant \lambda \end{cases}$$

3. On pose $U = X - \lambda$.

(a) La fonction de répartition G de U est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} G\,(x) &= P\left([U \leqslant x]\right) = P\left([X - \lambda \leqslant x]\right) \\ &= P\left([X \leqslant x + \lambda]\right) = F\left(x + \lambda\right) \end{aligned}$$

avec $x + \lambda \geqslant \lambda \iff x \geqslant 0$. Donc

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{\lambda - (x + \lambda)} = 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) La fonction de répartition G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Donc U est une variable aléatoire à densité, dont une densité g vérifie pour tout réel x non nul :

$$g(x) = G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On reconnaît une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.
Ainsi $\boxed{U \hookrightarrow \mathscr{E}(1)}$ d'où $E(U) = \dfrac{1}{1} = 1$ et $V(U) = \dfrac{1}{1^2} = 1$.

(c) Et comme $X = U + \lambda$, X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = E(U) + \lambda = 1 + \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X) = V(U) = 1$$

Partie B

$$S_n = \overline{X_n} - 1 = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - 1 \qquad \text{et} \qquad Y_n = \min(X_1\,,\, X_2\,\ldots\,,\, X_n)$$

1. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} E(S_n) &= E\left(\overline{X_n}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) - 1 \ \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= E(X) - 1 \\ &= (1+\lambda) - 1 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

S_n est donc un estimateur sans biais de λ.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} V(S_n) &= V\left(\overline{X_n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) \ \text{ par indépendance des } X_k \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

S_n est un estimateur sans biais de θ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} V(S_n) = 0$.
On peut conclure que S_n est un estimateur convergent de λ.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_n(x) = P([Y_n \leqslant x]) = 1 - P([Y_n > x])$. Or pour tout $\omega \in \Omega$,
$\min\{X_1(\omega)\,,\, X_2(\omega)\,\ldots\,,\, X_n(\omega)\} > x \iff \forall\, k \in [\![1\,,\, n]\!],\ X_k(\omega) > x$

$$\text{Donc } \ [Y_n > x] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x] \quad \text{puis} \quad P([Y_n > x]) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\right)$$

Puisque les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, $P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k > x]\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} P([X_k > x])$.
Comme elles suivent toutes la même loi que X,
$P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k > x]\right) = P([X > x])^n = (1 - F(x))^n$.

$$\text{Ainsi} \quad F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$$

Finalement

$$F_n(x) = \begin{cases} 1 - (1-0)^n & = & 0 & \text{si } x < \lambda \\ 1 - \left(1 - (1 - \mathrm{e}^{\lambda - x})\right)^n & = & 1 - \mathrm{e}^{n\,(\lambda - x)} & \text{si } x \geqslant \lambda \end{cases}$$

3. On pose $Z_n = Y_n - \lambda$.

(a) La fonction de répartition G_n de Z_n est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P([Z_n \leqslant x]) = P([Y_n - \lambda \leqslant x]) \\ &= P([Y_n \leqslant x + \lambda]) = F_n(x + \lambda) \end{aligned}$$

avec $x + \lambda \geqslant \lambda \iff x \geqslant 0$. Donc

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{n\left(\lambda - (x+\lambda)\right)} = 1 - \mathrm{e}^{-n\,x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) La fonction de répartition G_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Donc Z_n est une variable aléatoire à densité, dont une densité g_n vérifie pour tout réel x non nul :

$$g_n(x) = G_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\,\mathrm{e}^{-n\,x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On reconnaît une densité de la loi exponentielle de paramètre n.
Ainsi $\boxed{Z_n \hookrightarrow \mathscr{E}(n)}$

(c) On déduit de la question précédente, $E\left(Z_n\right)=\dfrac{1}{n}$ et $V\left(Z_n\right)=\dfrac{1}{n^2}$.
Et comme $Y_n=Z_n+\lambda$, Y_n admet une espérance et une variance :

$$E\left(Y_n\right)=E(Z_n)+\lambda=\frac{1}{n}+\lambda \qquad \text{et} \qquad V\left(Y_n\right)=V(Z_n)=\frac{1}{n^2}$$

4. On pose $T_n=Y_n-\dfrac{1}{n}$.

- $E(T_n)=E(Y_n)-\dfrac{1}{n}=\left(\dfrac{1}{n}+\lambda\right)-\dfrac{1}{n}=\lambda.$

  Donc T_n est un estimateur sans biais de λ.

- De plus $V(T_n)=V(Y_n)=\dfrac{1}{n^2} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$

  Donc T_n est un estimateur convergent de λ.

- Enfin $V(S_n)-V(T_n)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n^2}$ est strictement positif dès que $n\geqslant 2$.

  Par conséquent T_n est un estimateur plus efficace que S_n pour le paramètre λ.