Final - sq20

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. **Le formulaire distribué en cours est le seul document autorisé. L'utilisation de la calculatrice est conseillée.**

Exercice 1 : 5 questions indépendantes (5 points)

1. Dans une population, on étudie deux caractères génétiques notés A et B.
   45% des individus possèdent le caractère A, 50% le caractère B, et 30% ne possèdent ni A ni B. On choisit un individu au hasard dans la population. Calculer la probabilité qu'il possède le caractère B sachant qu'il possède déjà le caractère A.
2. Trois chasseurs tirent simultanément sur trois canards. Chacun en vise un au hasard, et le tue à coup sûr. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de canards tués.
   Combien vaut $P([X=3])$?
3. Soit X une variable aléatoire réelle continue qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,,\,4]$.
   Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Z=\sqrt{X}$.
4. Soit $X_1,\ X_2,\ \ldots\ ,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0\,,1)$. On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire Z que l'on précisera.
5. Une machine fabrique des rondelles en série. Leur diamètre X est une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, μ et σ étant inconnus. On prélève au hasard un échantillon de neuf rondelles. Les mesures des diamètres, en millimètres sont les suivantes :
   20.1 – 19.9 – 20.0 – 19.8 – 19.7 – 20.2 – 20.1 – 23.1 – 22.8
   Donner un intervalle de confiance observé pour μ au niveau de confiance 95%.

Exercice 2 : test d'hypothèse (5 points)

Le fabricant d'un médicament breveté affirme qu'il est efficace à 90% pour guérir une allergie.
Pour contrôler l'affirmation du fabricant, on se propose de construire un test d'hypothèse unilatéral à gauche permettant de décider si, au seuil de $\alpha = 1\%$, l'affirmation est légitime.

1. On choisit comme hypothèse nulle H_0 : $p = 90\%$ et comme hypothèse alternative H_1 : $p < 90\%$.
   Justifier ce choix.
2. On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de $n = 200$ patients atteints par l'allergie, associe la fréquence des personnes guéries par le médicament.
   Quelle est la loi de probabilité approximative de F sous l'hypothèse nulle H_0 ?
3. Choisir la variable aléatoire de test Z et déterminer sous l'hypothèse nulle H_0 le réel z_α tel que

$$P(Z > z_\alpha) = 0,99$$

4. En déduire le domaine d'acceptation D_0 de H_0 au seuil de signification de 1%.

5. Sur un échantillon de 200 personnes atteintes par cette allergie, 169 ont été guéries par le médicament. Déterminer si l'affirmation du fabricant est légitime (niveau $\alpha = 1\%$).

Exercice 3 : estimation ponctuelle (10 points)

Dans tout l'exercice, a désigne un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{3\,a^3}{t^4} \quad \text{si } t \geqslant a \qquad \text{et} \qquad f(t) = 0 \quad \text{si } t < a$$

1. (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur en fonction de a.
   (b) Montrer que la fonction f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Un fabricant de téléphone portable veut étudier l'autonomie de ses téléphones. Étant donné un téléphone pris au hasard et chargé au maximum, on note X le nombres d'heures écoulées entre sa mise en marche et l'instant où le téléphone s'éteint.
On admet que X est une variable aléatoire continue admettant f pour densité.

2. (a) En admettant que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\,a^2}$, justifier l'existence de l'espérance de X et calculer $E(X)$.
   (b) Montrer que la variance de X est $V(X) = \dfrac{3\,a^2}{4}$
3. On note F la fonction de répartition de X.
   (a) Donner $F(x)$ lorsque $x < a$.
   (b) Calculer $F(x)$ lorsque $x \geqslant a$.
   (c) En déduire la probabilité conditionnelle $P_{[X>2a]}\big([X > 4a]\big)$
4. On cherche à estimer le paramètre inconnu a. Pour cela on allume en même temps n téléphones portables pris au hasard que l'on a chargés au maximum (n étant un entier naturel non nul). On note, pour chaque entier k compris entre 1 et n, X_k la durée en heures écoulées lorsque le $k-$ème téléphone s'éteint. On suppose que les variables aléatoires $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X.
   (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$
   Construire à partir de $\overline{X_n}$ un estimateur sans biais T_n du paramètre a.
   (b) Montrer que T_n est un estimateur convergent de a.
   (c) Le fabricant teste au hasard 100 téléphones chargés au maximum. Il remarque que la somme de leurs durées de fonctionnement est $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} x_k = 603$ heures.
   À quelle valeur peut-il estimer ponctuellement le paramètre a ?