Exercice 1

1. Il s'agit d'un tirage sans remise. X suit la loi hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres $N = 10$, $n = 6$ et $p = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$:

$$X(\Omega) = [\![0\,,\,4]\!] \quad \text{et} \quad P\big(\,[X = k]\,\big) = \frac{\binom{4}{k}\binom{6}{6-k}}{\binom{10}{6}}$$

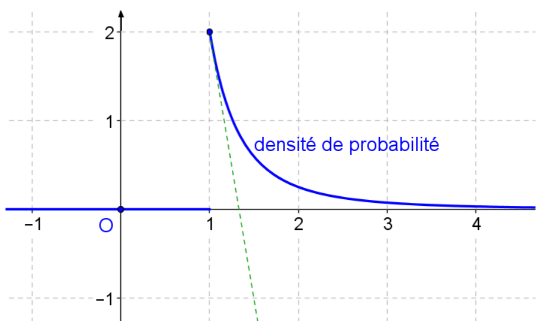
On sait que $E(X) = np = \dfrac{12}{5}$.

2. On prend comme univers Ω associé à cette expérience aléatoire l'ensemble des triplets (i, j, k) d'entiers naturels compris au sens large entre 1 et 6 : $\Omega = [\![1\,,\,6]\!]^3$ de cardinal 6^3. On choisit la probabilité uniforme sur Ω : toutes les listes sont équiprobables. Y peut prendre les valeurs 1, 2 et 3 : $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

- $P([Y = 1]) = \dfrac{\mathrm{Card}([Y = 1])}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{36}$
- $\mathrm{Card}([Y = 3])$ est le nombre de listes différentes qui comportent 3 numéros différents. On choisit d'abord 3 numéros parmi les 6, puis on range dans un certain ordre ces 3 numéros.
$P([Y = 3]) = \dfrac{\mathrm{Card}([Y = 3])}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{\binom{6}{3} \times 3!}{6^3} = \dfrac{20 \times 6}{6^3} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$
- D'où $P([Y = 2]) = 1 - P([Y = 1]) - P([Y = 3]) = 1 - \dfrac{1}{36} - \dfrac{20}{36} = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

$$E(Y) = P([Y = 1]) + 2\,P([Y = 2]) + 3\,P([Y = 3]) = \frac{1}{36} + \frac{30}{36} + \frac{60}{36} = \frac{91}{36}$$

3. L'énoncé ne demande pas de vérifier que f est une densité de probabilité.

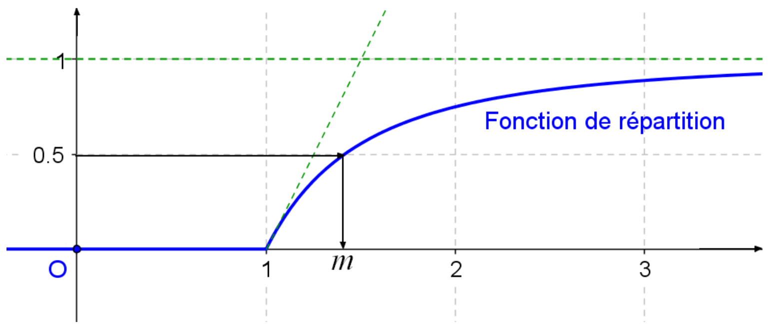


Pour tout réel $x < 1$, $F(x) = P([Z \leqslant x]) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Soit x un réel supérieur à 1. Alors $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int_1^x 2\,t^{-3}\,\mathrm{d}t$

$= \left[2\,\dfrac{t^{-3+1}}{-3+1}\right]_{t=1}^{t=x} = \left[-t^{-2}\right]_{t=1}^{t=x} = -x^{-2} + 1$

$$\text{Donc } F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$



Pour que $P(Z \leqslant m) = P(Z > m)$, il faut déjà que $m > 1$.

$P(Z \leqslant m) = P(Z > m) \iff F(m) = 1 - F(m) \iff F(m) = 1/2$
$\iff 1 - \dfrac{1}{m^2} = \dfrac{1}{2} \iff m^2 = 2 \iff \boxed{m = \sqrt{2}}$

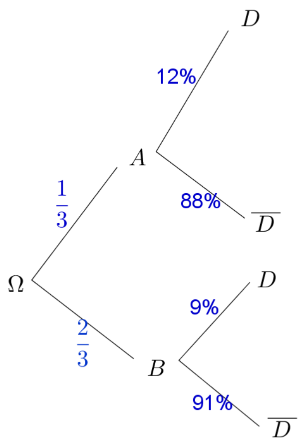
Exercice 2

1. On prélève sur le tapis roulant une balle au hasard.

(a) L'énoncé fournit les informations suivantes :

$$P(A) = \frac{1}{3}\ ; \quad P(B) = \frac{2}{3}\ ; \quad P_A(D) = 12\% \quad \text{et} \quad P_B(D) = 9\%$$

La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $\{A, B\}$ donne :



$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)\,P_A(D) + P(B)\,P_B(D) \\ &= \frac{1}{3}\times 0,12 + \frac{2}{3}\times 0,9 \\ &= 0,04 + 0,06 \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

(b) L'énoncé demande la probabilité conditionnelle $P_D(A)$.

$$P_D(A) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\times P_A(D)}{P(D)}$$

Donc $\qquad P_D(A) = \dfrac{\frac{1}{3}\times 0,12}{\frac{1}{10}} = 10\times 0,04 = \dfrac{2}{5}$

2. On prélève n balles au hasard à la sortie du tapis roulant.

(a) La même épreuve de Bernoulli est répétée n fois de façon identique et indépendante : on prélève au hasard une balle, elle est défectueuse («succès» de probabilité $p = 0,1$) ou ne l'est pas («échec» de probabilité $q = 1-p = 0,9$). X est le nombre de balles défectueuses (parmi les n prélevées), les prélèvements étant indépendants. Donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ de paramètres n et $p = P(D) = \dfrac{1}{10}$.

D'où $X(\Omega) = [\![0\,,\,n]\!]$ et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$P\left([X=k]\right) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{9^{n-k}}{10^n}$$

(b) $\mathrm{E}(X) = np = \dfrac{n}{10}$ et $\mathrm{V}(X) = npq = \dfrac{9n}{100}$

3. On suppose que $n = 3600$. $\qquad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$.

(a) $\mu = E(Z) = E(X) = \dfrac{n}{10} = 360$ et $\sigma^2 = V(Z) = V(X) = \dfrac{9\,n}{100} = 9\times 36$.

D'où $\sigma = \sqrt{9\times 36} = 3\times 6 = 18$. $\qquad$ Ainsi $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{N}(360\,,18)}$.

(b) $P([X \geqslant 350]) = 1 - P([X < 350]) = 1 - P([X \leqslant 349]) \approx 1 - P([Z \leqslant 349,5])$ d'après la correction de continuité.

Puisque $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$, la variable aléatoire $U = \dfrac{Z-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,,\,1)$.

Donc $P\left(Z \leqslant 349,5\right) = P\left(\left[\dfrac{Z-\mu}{\sigma} \leqslant \dfrac{349,5-360}{18}\right]\right) = P\left([U \leqslant -7/12]\right)$

Avec $P\left([U \leqslant -7/12]\right) = \Phi\left(-\dfrac{7}{12}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{7}{12}\right)$.

Ainsi $1 - P([Z \leqslant 349,5]) = \Phi\left(\dfrac{7}{12}\right) \approx \Phi(0,583) \approx 0,72$.

Finalement $P([X \geqslant 350]) \approx 72\%$

Remarques :

- en utilisant un logiciel de calcul numérique comme Scilab, on obtient après avoir saisi : `1-cdfnor("PQ",349.5,360,18)`,

$$\Phi(7/12) \approx 72,02\%$$

- si on garde la «vraie» loi de X (loi binomiale $\mathscr{B}(3600\,,\,1/10)$, en entrant dans Scilab : `1-cdfbin("PQ",349,3600,0.1,0.9)`, on obtient

$$P([X \geqslant 350]) \approx 71,85\%$$

4. On modélise le nombre de balles produites en 5 minutes par la machine A par une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 20$.

(a) Ensemble des valeurs prises par Y : $\quad Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n, $P\big([Y=n]\big) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

Espérance et de Y : $\quad E(Y) = \lambda \quad$ et variance de Y : $\quad V(Y) = \lambda$.

(b) Le nombre moyen de balles fabriquées par la machine A en 5 minutes est l'espérance $E(Y)$ du nombre Y de balles produites en 5 minutes, c'est-à-dire 20 balles. Or 60 minutes = 12 × 5 minutes. Donc la machine A fabrique en moyenne 240 balles par heure.

(c) La variable aléatoire T représente le nombre de balles défectueuses produites par la machine A en 5 minutes. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$.

- Premier cas : supposons $k \leqslant n$.
  La probabilité conditionnelle $P_{[Y=n]}([T=k])$ est la probabilité d'obtenir k balles défectueuses parmi n balles produites par la machine A. On est en présence d'un schéma de Bernoulli à n épreuves identiques et indépendantes.

$$P_{[Y=n]}([T=k]) = \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} \qquad \text{avec } a = 12\% = 0,12$$

- Second cas : supposons $k > n$.
  Il est alors impossible d'obtenir k balles défectueuses parmi n balles. D'où : $P_{[Y=n]}([T=k]) = 0$.

(d) $T(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit k un entier naturel quelconque fixé.

$\{[Y=n] \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P([Y=n]) \neq 0$.
Alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P\big([T=k]\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P([Y=n] \cap [T=k]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P([Y=n]) \times P_{[Y=n]}([T=k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P([Y=n]) \times P_{[Y=n]}([T=k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} a^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} (1-a)^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} a^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} (1-a)^{n-k} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} a^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} \times (1-a)^{n-k}
\end{aligned}$$

On procède maintenant à un changement d'indice dans le symbole de sommation discrète $\sum$, en posant $i = n-k$. On en déduit que $n = i+k$ et que

$$\begin{aligned}
P\big([T=k]\big) &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} a^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{i+k}}{i!} \times (1-a)^i \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} a^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i \lambda^k}{i!} \times (1-a)^i \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} a^k}{k!} \lambda^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-a)]^i}{i!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} (\lambda a)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-a)]^n}{n!}
\end{aligned}$$

Or on rappelle que pour tout réel x, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$. Donc

$$\begin{aligned}
P\big([T=k]\big) &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} (\lambda a)^k}{k!} \exp(\lambda(1-a)) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda+\lambda(1-a)} (\lambda a)^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^k}{k!}
\end{aligned}$$

On peut conclure que T suit une loi de Poisson de paramètre

$$\gamma = \lambda a = 20 \times 0,12 = 2,4.$$