PROBABILITÉS - STATISTIQUES - SQ20

TRONC COMMUN

MÉDIAN - PRINTEMPS 2014

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Une feuille de notes manuscrites au format A4 recto/verso et la table de la loi normale sont les seuls documents autorisés.
L'utilisation d'une calculatrice est recommandée.

Exercice 1 (6 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On forme un jury de 6 personnes choisies au hasard dans un groupe composé de 6 hommes et de 4 femmes. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de femmes dans ce jury.

   Reconnaître la loi de probabilité de X et donner son espérance mathématique $E(X)$.

2. On lance simultanément 3 dés cubiques équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
   On note Y la variable aléatoire égale au nombre de numéros différents sortis.
   Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer ensuite son espérance.

   Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

3. Soit Z une variable aléatoire réelle continue dont une densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad t < 1 \end{cases}$$

   Déterminer la fonction de répartition F de Z.
   En déduire la médiane de Z, c'est-à-dire le nombre réel m tel que $P(Z \leqslant m) = P(Z > m)$.

Exercice 2 (14 points)

Une usine fabrique en série des balles de ping-pong à l'aide de deux machines A et B. La machine A produit un tiers des éléments, les autres étant produits par la machine B. Certaines balles fabriquées présentent un défaut. C'est le cas pour 12% des balles fabriquées par la machine A et pour 9% de celles fabriquées par la machine B. À la sortie des machines, les balles arrivent dans le désordre sur un tapis roulant. Ce qui fait que si l'on prend une balle au hasard à la sortie du processus de fabrication, la probabilité qu'elle provienne de A est $\dfrac{1}{3}$ et celle qu'elle provienne de B est $\dfrac{2}{3}$.

1. On prélève sur le tapis roulant une balle au hasard. On définit les événements :

   - A : «la boule provient de la machine A»,
   - B : «la boule provient de la machine B»,
   - D : «la balle prélevée présente un défaut».

   (a) Démontrer que $P(D) = \dfrac{1}{10}$

   (b) On constate que la balle prélevée présente un défaut.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?

2. On se donne un entier naturel n non nul et on suppose maintenant que l'on prélève n balles au hasard à la sortie du tapis roulant. Les prélèvements successifs sont supposés indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de balles défectueuses prélevées.

   (a) Reconnaître la loi de probabilité de X. Donner l'ensemble des valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k, l'expression de $P(X = k)$.

   (b) Exprimer, en fonction de n, l'espérance mathématique de X et sa variance $V(X)$.

3. On suppose dans cette question que $n = 3600$. On admet que dans ce cas, on peut approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Z suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,, \sigma)$.

   (a) Donner les paramètres μ et σ de la loi de Z pour que X et Z aient la même espérance et la même variance.

   (b) Déterminer une valeur approchée de la probabilité d'avoir au moins 350 balles présentant un défaut parmi les 3600 balles prélevées.

4. On arrête la production de la machine B et on ne s'intéresse qu'à la production de A. On suppose à présent que le nombre de balles produites en 5 minutes par la machine A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.

   On considère la variable aléatoire T représentant le nombre de balles défectueuses produites par la machine A en 5 minutes.

   (a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par Y et pour chacune de ces valeurs n, l'expression de $P\big([Y = n]\big)$. Rappeler aussi la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

   (b) Quel est le nombre moyen de balles fabriquées par la machine A en une heure ?

   (c) Soient k et n deux entiers naturels. En distinguant les cas $k \leqslant n$ et $k > n$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{[Y=n]}([T = k])$.

   (d) Démontrer, en utilisant le système complet d'événements $\{[Y = n] \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, que T suit une loi de Poisson de paramètre $\mu = 2,4$.