
Médian SQ20

Jeudi 15 avril 2021, 10h00-12h00

Le barème tient compte de la longueur du sujet.

Exercice 1 *Lancer de pièce triphasé.* Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie (ABCABCABC...). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p ($0 < p < 1$). Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie s'arrête alors).

1. Donner une représentation de l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) associé à cette expérience aléatoire.
2. On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement *A gagne la partie lors du n-ième lancer* (resp. *B, C*). Calculer $P(A_1), P(B_2), P(C_3)$. Les événements A_1 et B_2 sont-ils indépendants?
3. En **discutant suivant les valeurs de n** , calculer $P(A_n), P(B_n), P(C_n)$. *Pour traiter cette question, vous pouvez utiliser une variable aléatoire (à définir soigneusement).*
4. Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.
5. Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur?

Exercice 2 *Le bus ou le train ?.* Une compagnie de bus affrète tous les jours un bus pour relier Paris à Limoges. Ce bus a la capacité d'accueillir 50 passagers. Le prix du billet est de 30€. Le responsable des ventes a remarqué que si N billets sont vendus alors il y a en moyenne 85% des passagers qui se présentent au départ du bus, et cela quelle que soit la valeur de N . Il fait l'hypothèse que les comportements des acheteurs sont indépendants les uns des autres.

Un voyageur qui ne se présente pas au départ perd son billet.

Par ailleurs si le bus est plein et qu'un voyageur ne peut pas embarquer, la compagnie lui rembourse son billet de bus et lui offre un billet de train (au prix de 60€) pour qu'il puisse effectuer son voyage.

1. On suppose dans cette partie que N est un nombre fixé par la compagnie. On note X la v.a. désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant au départ, et $G(X, N)$ la v.a. désignant le montant en euros du chiffre d'affaire réalisé par la compagnie pour un bus.
 - (a) Quelle est la distribution de probabilité de X ? Rappeler son espérance et sa variance.
 - (b) Soit la v.a. Y qui désigne le nombre de passagers qui vont faire Paris-Limoges en train au lieu de prendre le bus. Quel est l'ensemble des issues, notés $Y(\Omega)$, de Y ? Discuter selon la valeur de N .
 - (c) Donner la distribution de probabilité de Y . Vous utiliserez la loi de X pour décrire la loi de Y .
 - (d) Donner l'expression de $G(X, N)$.
2. Écrire une expression du chiffre d'affaire espéré (ou moyen) par cette compagnie de bus. On notera $G(N)$ ce chiffre d'affaire moyen. *On ne vous demande pas de calculer cette somme.*
3. Décrire succinctement un algorithme (en pseudo-code, python, etc.) qui permet de trouver la valeur optimale de N . *On ne vous demande pas de trouver explicitement cette valeur de N .*

Exercice 3 *Consommation d'eau.* La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f_X a la forme :

$$f_X(x) = c(x-a)(b-x)1_{[a,b]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes strictement positives ($a < b$) et $1_{[a,b]}(t) = 1$ si $t \in [a, b]$ et 0 sinon.

1. À l'aide d'une intégration par partie, vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b (x-a)^n (b-x) dx = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

2. Exprimer la constante c en fonction de a et b .
3. Calculer $\mathbb{E}[X-a]$ et $\mathbb{E}[(X-a)^2]$. En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}(X)$.
4. Donner la fonction de répartition F de la variable aléatoire X : on distinguera pour le calcul de $F(x)$ les cas $x < a$, $a \leq x \leq b$ et $x > b$ et, dans le deuxième cas, on écrira $F(x)$ en fonction de $(x-a)$ et $(b-x)$ sans développer ni réduire le polynôme obtenu. Donner l'allure générale des représentations graphiques de f et F . Proposer une interprétation physique des constantes a et b .
5. En notant X_i la consommation du i -ème jour et en supposant que les X_i sont indépendantes et de même loi que X , exprimer à l'aide de F et de n la fonction de répartition de la variable aléatoire $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. **On commencera par écrire l'événement $\{M_n \leq x\}$ en fonction des événements $\{X_i \leq x\}$.**
6. En fait la ville est alimentée en eau par un canal qui peut fournir au maximum une quantité journalière d'eau $x_0 = a + 0.9(b-a)$ et par un réservoir de sécurité dans lequel elle peut puiser en cas de trop forte demande. Calculer numériquement la probabilité qu'au cours des 31 jours du mois de juillet, on ne fasse jamais usage du réservoir de sécurité (le résultat ne dépend ni de a ni de b).

Exercice 4 *Loi normale et réglage d'une machine (1).* Une machine fabrique des tubes métalliques cylindriques. Les diamètres, en millimètre, des tubes sont distribués suivant une loi normale $\mathcal{N}(15;9)$.

Pour être utilisables, les tubes doivent avoir un diamètre compris entre 14 et 16 millimètres.

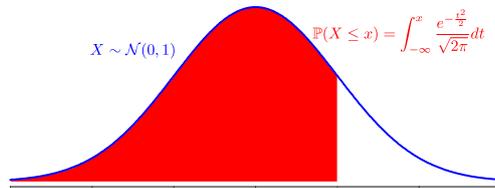
1. Quelle est la probabilité qu'un tube ne soit pas utilisable.
2. Un ingénieur affirme qu'en modifiant la machine, il peut réduire l'écart-type. Quel devrait être cet écart-type pour que 95% des tubes soient utilisables ?

Exercice 5 *Loi normale et réglage d'une machine (2).* Des sachets sont remplis de poudre par une machine. On pose une étiquette sur chaque sachet, indiquant qu'il contient 100 grammes de poudre.

On observe que la masse d'un sachet suit une loi normale d'écart-type $\sigma = 2$. La valeur de μ , l'espérance, dépend du réglage de la machine.

Sur quelle valeur de μ faut-il régler la machine pour qu'au moins 99% des sachets aient une masse supérieure à 100g ?

Annexes



Loi normale centrée réduite

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de t :

t	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(t)	0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995

t	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
F(t)	0,99997	0,99998	0,99999	0,99999	0,99999	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000