Automne 2006
Jeudi 9 novembre 2006

Médian de l'UV SQ 40

Durée : **2 heures**.
Tous documents autorisés.
Calculatrice autorisée.
Ordinateur portable interdit.

– **Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.**
– **Les 4 exercices sont indépendants.**

Exercice 1 (Questions de cours)
Répondez aux questions suivantes (Maximum 10 lignes par réponse).

1. Présenter brièvement l'origine du système de Pearson et ses apports.
2. Que signifie l'étude des statistiques fondamentales ?

Exercice 2

Partie A

Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier dont le diamètre est exprimé en millimètres. On note D la v.a. qui, a chaque rondelle prélevée au hasard dans la production, associe *«son diamètre»*. On suppose D suit une loi normale de moyenne $m_D = 50$ et d'ecart type $\sigma_D = 0.5$.

1. Les rondelles dont le diamètre n'est pas compris entre $49.2mm$ et $50.8mm$ doivent être mises au rebut. Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit mise au rebut.

L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : il est possible de modifier des réglages sur les machines produisant les rondelles. On note X la variable aléatoire qui, a chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son *«diamètre après réglage»*. On suppose que la variable aleatoire X suit une loi normale de moyenne m_X et d'ecart type σ_X.

2. **Réglage de** σ_X. On suppose ici que $m_X = 50$. On note s la probabilté qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme pour le diamètre.
   (a) Exprimer en justifiant la démarche, s en fonction de σ_X.
   (b) Application numérique : déterminer σ_X pour que s soit égale à 0.99.

Lorsque la pièce est trop petite, la perte est alors de 2 euros. Lorsque la pièce est trop grande, on peut la rectifier ; le coût de l'opération est égal à 1 euros et on admet que la pièce est acceptée après rectification. Soit P la variable aléatoire égale à la *«perte subie»*.

3. **Réglage de** m_X. On suppose ici que $\sigma_X = 0.3$.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de P ?
   (b) Exprimer la loi de probabilités de P.
   (c) Exprimer en justifiant votre démarche, $E(P)$, l'espérance mathématique de P, en fonction de m_X.
   (d) Déterminer la valeur de m_X pour que $E(P)$ soit minimale.

Partie B

On suppose que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans un stock important présente un diamètre défectueux est 0.02. Les rondelles sont commercialisées par lots de 100. On prélève au hasard un lot de 100 dans un dépôt de l'usine. On considère la v.a. Y, définie commme *«le nombre rondelles non conformes dans un lot»*.

4. Quelle loi suit la v.a. Y ? Justifier. Donner son espérance mathématique, sa variance et son écart type.

5. Calculer la probabilité qu'au moins une rondelle soit non conforme dans un lot.
6. Par quelle loi peut-être approchée la loi de Y ? Justifier. Donner les caratéristiques de cette nouvelle loi.
7. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus (strictement) 5 rondelles non conformes dans un lot.

Chaque semaine, l'entreprise vend en moyenne 150 lots. On considère la v.a. T définie comme *«le nombre rondelles non conformes commercialisées en une semaine»*.

8. Quelle loi suit la v.a. T ? Justifier.
9. Par quelle loi peut-être approchée la loi de T ? Justifier. Donner les caratéristiques de cette nouvelle loi.
10. Quelle la probabilité qu'il y ait entre 290 et 310 rondelles non conformes commercialisées ?

Exercice 3
Une entreprise vend des appareils électriques. On admet que *«la durée de vie de chacun de ces appareils exprimée en mois»* est une v.a. X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que chacun de ces appareils a une probabilité p de tomber en panne pendant les 6 premiers mois de son utilisation.

1. Déterminer en justifiant votre démarche le paramètre λ de la loi de X en fonction de p.
2. On suppose $p = 0.15$.
   (a) Donner la valeur de λ.
   (b) Déterminer $P(X \geqslant 8 | X \geqslant 2)$.

On suppose maintenant que $p = 0.15$.

Cette entreprise a vendu n appareils. Soit Y la v.a. égale au *«nombre d'appareils qui tombent en panne pendant les 6 premiers mois de leur utilisation»*.

3. Quelle loi suit la v.a. Y ? Justifier. Calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart type.
4. On suppose $n = 400$.
   (a) Par quelle loi peut-être approchée la loi de Y ? Justifier. Donner les caractéristiques de cette nouvelle loi.
   (b) Calculer la probabilité que plus de 65 appareils tombent en panne pendant les 6 premiers mois de leur utilisation.

L'entreprise envisage de vendre ces appareils avec une garantie de 6 mois et pour cela majore de x euros le prix de chaque appareil. En revanche, elle assume durant cette période de garantie les réparations (toujours de même nature) qui lui coûtent 70 euros par réparation.

5. Quelle doit être la valeur de majoration du prix de vente x, par appareil pour couvrir avec une probabilité supérieure ou égale à 0.90 les frais de réparation entraînés par cette politique de vente dans le cas où
   (a) $n = 400$?
   (b) $n = 800$?

Exercice 4
On considère le système S formé de 7 composants comme indiqué sur la figure 1. On suppose que tous les composants sont identiques et de fiabilité r.
Déterminer en justifiant votre démarche, R la fiabilité du sytème en fonction de r.

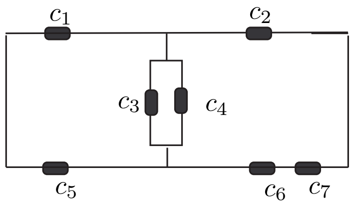

FIG. 1 – Système à étudier

Automne 2006
Jeudi 10 novembre 2006

Correction Médian de l'UV XQ 40