

EXAMEN FINAL*Session Printemps 2007*Durée de l'épreuve : **2 heures**

- Il est conseillé aux candidats de prendre connaissance de la totalité du texte du sujet avant de répondre à toute question.
- Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question.
- On accordera la plus grande attention à la clarté de la rédaction, à la présentation, aux schémas et à la présence d'unité de mesure. Les résultats seront encadrés.

Les exercices et problème sont indépendants
Documentation : Une feuille A4 recto/verso est autorisée

Exercice 1: Asservissement d'un Pendule inversé

Soit le chariot munit d'un pendule inversé décrit dans la figure 1. Une force F est appliquée au chariot afin de maintenir la tige à une position verticale. Il est admis que la tige et le chariot se déplacent dans un même plan sans frottement et sans glissement du chariot sur son chemin de roulement.

Les variables de la figure 1 sont les suivants :

| | |
|---|------------|
| La masse du chariot | M ; |
| La masse du pendule | m ; |
| La friction du chariot | b ; |
| La demi-longueur du pendule | l ; |
| L'inertie du pendule | I ; |
| La force appliquée au chariot | F ; |
| La position du chariot | x ; |
| L'angle par rapport à la verticale du pendule | θ . |

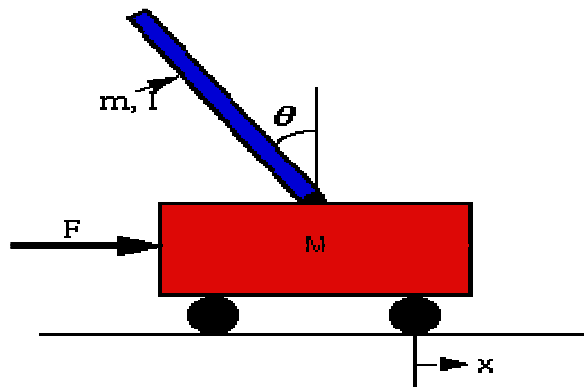


Figure 1. Chariot et pendule inversé

Le mouvement de ce système est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\theta} - \frac{3(1+r)g}{4+r} \theta = -\frac{3}{4+r} \frac{F}{Ml} \quad \text{Avec } r = \frac{m}{M}$$

Quelles sont les conditions de stabilité de ce système (maintien à la position verticale de la tige) si on le commande par :

- 1) Une action proportionnelle de la forme $F = K_p \theta$
- 2) Une action proportionnelle dérivée de la forme $F = K_p \theta + K_d \dot{\theta}$

Exercice 2: Stabilité par l'approche de Lyapunov

Soit le système électrique représenté par la figure 2.

- 1) Prouvez que ce système peut être modélisé sous la forme d'équation d'état suivante :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(V_c - R_1 i)$$

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C}\left(-i - \frac{V_c}{R_2}\right)$$

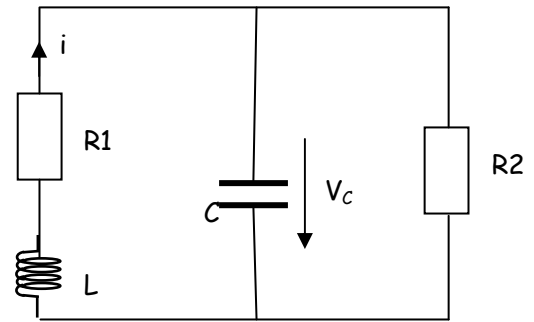
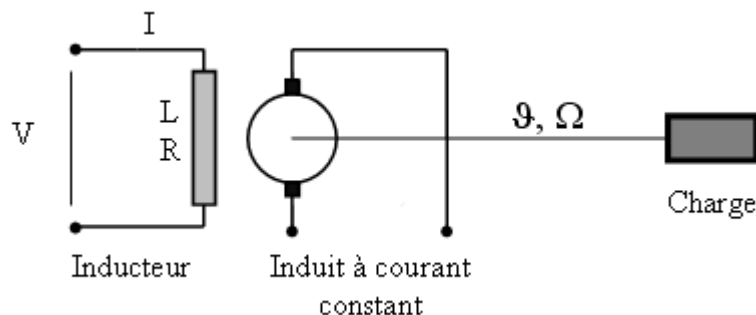


Fig. 2. Circuit électrique

- 2) Proposez une fonction de Lyapunov candidate et prouvez que l'origine de ce système est stable.
- 3) Quel est le type de la stabilité.

Problème: Asservissement de position angulaire sans et avec retour tachymétrique

Le mouvement de rotation de l'arbre d'un moteur à courant continu de type à excitation indépendante résulte de l'action du champ magnétique produit par le circuit inducteur, sur le circuit de l'induit. La variation du couple moteur appliqué sur l'arbre peut s'obtenir par la variation du courant inducteur tout en maintenant le courant induit constant (commande par l'inducteur).



L'objectif est d'asservir la position angulaire à une position (tension) de référence et d'analyser ensuite les performances en stabilité en considérant les deux schémas de commande :

- ⚡ Commande sans retour tachymétrique
- ⚡ Commande avec retour tachymétrique

On admet les fonctions de transfert suivantes :

$$\begin{cases} G_1(p) = \frac{\theta(p)}{V(p)} = \frac{K_m}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} \\ G_2(p) = \frac{\Omega(p)}{V(p)} = \frac{K_m}{(1+T_1p)(1+T_2p)} \end{cases}$$

K_m = Gain en vitesse.

T_1 est la constante de temps électrique et T_2 est la constante de temps mécanique.

θ et Ω désignent respectivement la position et la vitesse angulaire du moteur.

Dans la suite on traitera le problème avec les valeurs numériques suivantes :

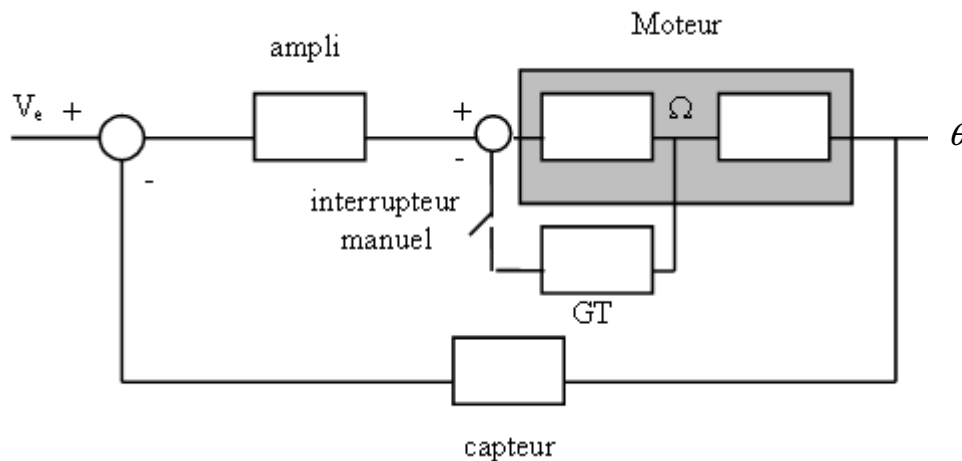
$$K_m = 1 \text{ volt.rad/s} \quad T_1 = 0.1 \text{ s} \quad T_2 = 0.5 \text{ s.}$$

On désire que la position angulaire suive un signal de référence représenté par une tension V_e . Pour cela on considère une boucle d'asservissement comportant:

- ✚ un générateur de tension V_e .
- ✚ un comparateur de tensions.
- ✚ un amplificateur de tension de gain K ajustable.
- ✚ un capteur de position fournissant une tension proportionnelle à la position angulaire; soit $V_{capt} = K_\theta \cdot \theta$; $K_\theta = 4 \text{ volt / rad}$.

Dans une première étape l'asservissement de position est considéré sans retour tachymétrique et dans une deuxième étape on ajoutera un retour tachymétrique. Cette opération consiste à monter sur l'arbre du moteur une génératrice tachymétrique (GT) qui permet de délivrer une tension V_{GT} proportionnelle à la vitesse de rotation; soit $V_{GT} = K_{GT} \cdot \Omega$; $K_{GT} = 0.25 \text{ volt / rad / s}$.

1. Compléter le schéma fonctionnel de l'asservissement :



2. Etablir la fonction de transfert en boucle ouverte dans les deux cas: interrupteur ouvert (Asservissement sans retour tachymétrique) et interrupteur fermé (Asservissement avec retour tachymétrique).

3. Etude du système asservi sans retour tachymétrique.

- a) Etudier la stabilité de l'asservissement en fonction de K par une méthode de votre choix.
- b) Déterminer le gain K pour avoir une marge de phase de 45° .

4. Etude du système asservi avec retour tachymétrique.

- a) Quelles sont les conditions sur K afin que le système bouclé soit stable ? Comparer au résultat trouvé en 3a).
- b) Que devient la marge de phase pour la valeur de K trouvée en 3b) ?
- c) Conclure sur l'intérêt de l'insertion d'une génératrice tachymétrique dans un asservissement de position.