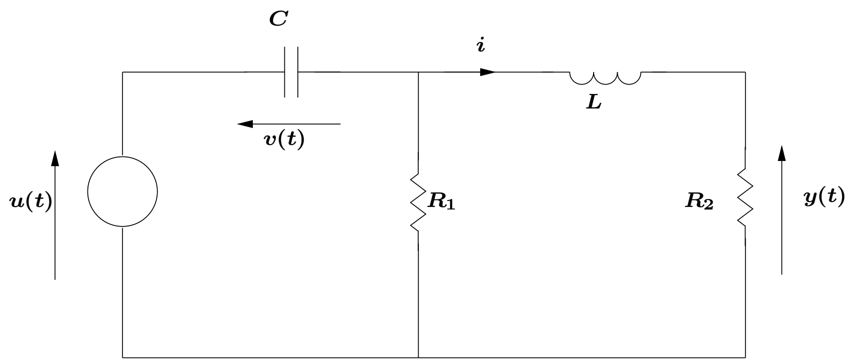
Les documents autorisés sont une feuille aide-mémoire et les tableaux des transformées de Laplace.

Problème 1

Le système de la figure ci-dessous a pour entrée la tension $u(t)$ et pour sortie la tension $y(t)$.



Soit i_1 le courant électrique dans la résistance R_1 (de haut en bas).

(2 points) 1. En utilisant les lois des mailles et des nœuds, déterminer les équations caractéristiques du système.

(3 points) 2. En choisissant comme variables d'état la tension aux bornes de la capacité et le courant dans l'inductance, établir l'équation d'état du système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Gx(t)$$

Problème 2

On considère le système linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = (1 \quad 0)x(t)$$

On s'intéresse à la trajectoire du vecteur d'état $x(t)$ obtenue lorsqu'on applique un échelon unitaire à l'entrée de commande et à partir de la condition initiale suivante $x(0) = \binom{1}{0}$. Pour déterminer $x(t)$, on suivra la démarche suivante :

(3 points) 1. Exprimer la matrice de transition $\boldsymbol{\phi(t) = e^{At}}$ en fonction de $\boldsymbol{t}$.

(3 points) 2. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(t) d\tau$$

(1 point) 3. En déduire la solution $\boldsymbol{x(t)}$.

Problème 3

On considère le système de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{p^2}{p^4 - 2p^2 + 1}$$

(2 points) 1. Calculer les pôles de $\boldsymbol{H(p)}$.

(4 points) 2. Décomposer $\boldsymbol{H(p)}$ en éléments simples.

(2 points) 3. En déduire une représentation d'état du système.