

Les documents ne sont pas autorisés.

Problème : Synthèse d'une commande par placement de pôles : On considère le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{X}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} u, \quad \mathbf{Y} = \underbrace{(1 \ 0)}_{\mathbf{C}} \mathbf{X}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice \mathbf{A} . 1pt
2. Calculer les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} . Le système est-il stable? 2pt
3. Soit $\mathcal{C} = (\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B})$ la matrice de commandabilité du système. On désire placer les pôles $\lambda_1 = -5$ et $\lambda_2 = -6$. Est-il possible de réaliser cet objectif? 1pt
4. Donner la forme des matrices \mathbf{A}_c et \mathbf{B}_c du modèle d'état sous forme compagne horizontale.
5. Calculer la matrice de commandabilité de la paire $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$, notée \mathcal{C}_c . En déduire la matrice de passage $\mathbf{T} = \mathcal{C}_c \mathcal{C}^{-1}$ qui permet de transformer le système sous forme compagne horizontale. 2pt
6. Déterminer le polynôme caractéristique désiré. 1pt
7. Calculer le vecteur du retour d'état $\mathbf{K}^c = (k_1^c, k_2^c)$ du système sous forme compagne horizontale. 2pt
8. Calculer le vecteur du gain $\mathbf{K} = \mathbf{K}^c \mathbf{T}$ dans la base initiale \mathbf{X} . 2pt
9. Calculer l'expression suivante 2pt

$$(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \mathcal{C}^{-1} \left[\mathbf{A}^2 + 11\mathbf{A} + 30\mathbf{I}_2 \right]$$

Que remarque-t-on? Généraliser le résultat de votre remarque à un système quelconque d'ordre n . (NB : toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte) 2pt

10. Calculer le coefficient du pré-réglage $\mathbf{H} = \left(-\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B} \right)^{-1}$ permettant d'amener la sortie du système à une sortie désirée \mathbf{y}_d . 4pt
11. Exprimer la commande $\mathbf{U} = \mathbf{H}\mathbf{y}_d - \mathbf{K}\mathbf{X}$ en fonction de \mathbf{X} . 1pt