

Les documents ne sont pas autorisés.

Problème : Synthèse d'une commande par placement de pôles : (10 points) On considère le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{X}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} u, \quad \mathbf{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{X}$$

où $0 < \epsilon < 1$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$. 1pt
2. Calculer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$. Le système est-il stable ? 2pts
3. Soit $\mathcal{C} = (\mathbf{B} \ \mathbf{AB})$ la matrice de commandabilité du système. On désire placer les pôles $\lambda_1 = -5$ et $\lambda_2 = -6$. Est-il possible de réaliser cet objectif ? 1pt
4. Donner la forme des matrices $\mathbf{A}_c$ et $\mathbf{B}_c$ du modèle d'état sous forme compagne horizontale. 1pt
5. Calculer la matrice de commandabilité du la paire $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$, notée $\mathcal{C}_c$. En déduire la matrice de passage $\mathbf{T} = \mathcal{C}_c \mathcal{C}^{-1}$ qui permet de transformer le système sous forme compagne horizontale. 2pts
6. Déterminer le polynôme caractéristique désiré. 1pt
7. Calculer le vecteur du retour d'état $\mathbf{K}^c = (k_1^c, k_2^c)$ du système sous forme compagne horizontale en fonction de ϵ . 1pt
8. En déduire le vecteur du gain $\mathbf{K}$ dans la base initiale de $\mathbf{X}$ en fonction de ϵ . 1pt

Exercice 2 : (10 points)

Considérons l'équation d'état d'un système linéaire continu suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

avec $0 < a < 1$.

1. Le système est-il commandable ? 2pts
2. Calculer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$. 2pts
3. Dans le domaine de Laplace, calculer la matrice de transition $\mathbf{L}_p(e^{At}) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
En déduire l'expression de e^{At} en fonction de t . 3pts
4. Vérifier ce résultat en calculant e^{At} par la méthode de Sylvester. 3pts