Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Synthèse d'une commande par placement de pôles : On considère le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & \epsilon\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}_{B} u, \qquad Y = \underbrace{(0\ 1)}_{C} X$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A. **1pt**
2. Calculer les valeurs propres de la matrice A. Le système est-il stable ? **1pt**
3. Soit $\mathscr{C} = (B\ AB)$ la matrice de commandabilité du système. On désire placer les pôles $\lambda_1 = -5$ et $\lambda_2 = -4$. Est-il possible de réaliser cet objectif ? **1pt**
4. Donner la forme des matrices A_c et B_c du modèle d'état sous forme compagne horizontale. **1pt**
5. Calculer la matrice de commandabilité du la paire (A_c, B_c), notée $\mathscr{C}_c$. En déduire la matrice de passage $T = \mathscr{C}_c\mathscr{C}^{-1}$ qui permet de transformer le système sous forme compagne horizontale. **2pt**
6. Déterminer le polynôme caractéristique désiré. **1pt**
7. Calculer le vecteur du retour d'état $K^c = (k_1^c,\ k_2^c)$ du système sous forme compagne horizontale. **2pt**
8. Calculer le vecteur du gain $K = K^cT$ dans la base initiale X. **2pt**
9. Calculer le coefficient du pré-réglage $H = \left(-C(A - BK)^{-1}B\right)^{-1}$ permettant d'amener la sortie du système à une sortie désirée y_d. **3pt**
10. Exprimer la commande $U = Hy_d - KX$ en fonction de X. **1pt**

Exercice 2 : 5pts

Considérons un système linéaire non commandé défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix} x = Ax$$

Par la méthode de votre choix, calculer e^{At} en fonction de t.