Les documents ne sont pas autorisés.

Problème : Synthèse d'une commande par placement de pôles : (14 points) On considère le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} u, \qquad Y = \underbrace{(0\ 1)}_{C} X$$

où $0 < \epsilon < 1$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A. **1pt**
2. Calculer les valeurs propres de la matrice A. Le système est-il stable ? **1pt**
3. Soit $\mathscr{C} = (B\ AB)$ la matrice de commandabilité du système. On désire placer les pôles $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -2$. Est-il possible de réaliser cet objectif ? **1pt**
4. Donner la forme des matrices A_c et B_c du modèle d'état sous forme compagne horizontale. **1pt**
5. Calculer la matrice de commandabilité du la paire (A_c, B_c), notée $\mathscr{C}_c$. En déduire la matrice de passage $T = \mathscr{C}_c \mathscr{C}^{-1}$ qui permet de transformer le système sous forme compagne horizontale. **2pts**
6. Déterminer le polynôme caractéristique désiré. **1pt**
7. Calculer le vecteur du retour d'état $K^c = (k_1^c,\ k_2^c)$ du système sous forme compagne horizontale. **1pt**
8. En déduire le vecteur du gain K dans la base initiale de X. **1pt**
9. Calculer l'expression suivante **2pts**

   $$(0, 1)\mathscr{C}^{-1}\Big[A^2 + 5A + 6I_2\Big]$$

   Que remarque-t-on ? Généraliser le résultat de votre remarque à un système quelconque d'ordre n. (NB : toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte)
10. Calculer le coefficient du pré-réglage $H = \Big(-C(A - BK)^{-1}B\Big)^{-1}$ permettant d'amener la sortie du système à une sortie désirée y_d. **2pts**
11. Exprimer la commande $U = Hy_d - KX$ en fonction de X. **1pt**

Exercice 2 (6 points) : Considérons un système défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{1+a} \end{pmatrix} \boldsymbol{X} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{Bu}$$

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CX}$$

avec $\boldsymbol{a > 1}$. On supposera que l'état initial du système est caractérisé par un vecteur d'état nul $\boldsymbol{X(0)} = \binom{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{0}}$.

1. Calculer les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{A}$. **2pts**
2. Dans le domaine de Laplace, calculer la matrice de transition $\boldsymbol{L_p(e^{At}) = (pI - A)^{-1}}$
   En déduire l'expression de $\boldsymbol{e^{At}}$ en fonction de $\boldsymbol{t}$. **2pts**
3. Vérifier ce résultat en calculant $\boldsymbol{e^{At}}$ par la méthode de Sylvester. **2pts**