

Les documents ne sont pas autorisés.

Problème : Synthèse d'une commande par placement de pôles : (15 points) On considère le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_X + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B u, \quad Y = \underbrace{(0 \ 1)}_C X$$

où $0 < \epsilon < 1$.

1. Calculer les valeurs propres de la matrice A . Le système est-il stable? **1pt**
2. Soit $\mathcal{C} = (B \ AB)$ la matrice de commandabilité du système. On désire placer les pôles $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -2$. Est-il possible de réaliser cet objectif? **1pt**
3. Donner la forme des matrices A_c et B_c du modèle d'état sous forme compagne horizontale. **1pt**
4. Calculer la matrice de commandabilité de la paire (A_c, B_c) , notée \mathcal{C}_c . En déduire la matrice de passage $T = \mathcal{C}_c \mathcal{C}^{-1}$ qui permet de transformer le système sous forme compagne horizontale. **2pts**
5. Déterminer le polynôme caractéristique désiré. **1pt**
6. Calculer le vecteur du retour d'état $K^c = (k_1^c, k_2^c)$ du système sous forme compagne horizontale. **1pt**
7. En déduire le vecteur du gain $K = (k_1, k_2)$ dans la base initiale de X . **1pt**
8. Calculer le coefficient du pré-réglage $H = (-C(A - BK)^{-1}B)^{-1}$ permettant d'amener la sortie du système à une sortie désirée y_d . **2pts**
9. Exprimer la commande $U = Hy_d - KX$ en fonction de X . **1pt**
10. Dans cette question, au lieu de fixer préalablement les valeurs propres, on souhaite concevoir une loi de commande par retour d'état $u = -Kx$ avec $K = (k_1, k_2)$, telle que le système en boucle fermée ait des pôles avec une partie réelle strictement inférieure à -2 .
 - 10.a) Calculer le polynôme caractéristique $P_f(\lambda)$ de la matrice $A_f = A - BK$ en boucle fermée. **1pt**
 - 10.b) Pour quelles valeurs de k_1 et k_2 le système en boucle fermée aura des pôles avec une partie réelle strictement inférieure à -2 . **3pts**

Exercice 2 : (5 points)

Considérons l'équation d'état d'un système linéaire continu suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

avec $0 < a, b < 1$.

1. Calculer les valeurs propres de la matrice A . **1pts**
2. Dans le domaine de Laplace, calculer la matrice de transition $L_p(e^{At}) = (pI - A)^{-1}$
En déduire l'expression de e^{At} en fonction de t . **2pts**
3. Vérifier ce résultat en calculant e^{At} par la méthode de Sylvester. **2pts**