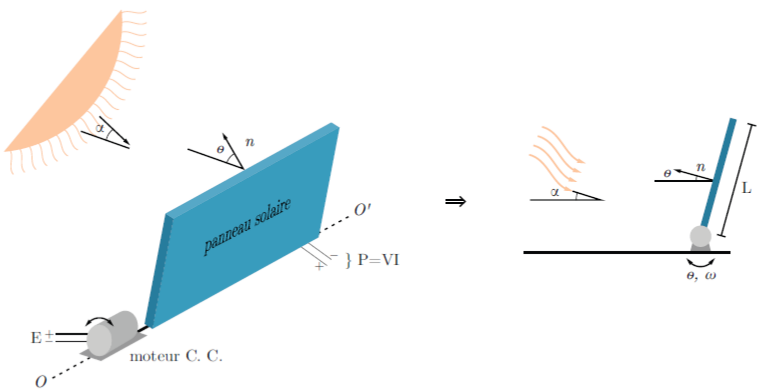
Les documents ne sont pas autorisés.

Problème : Commande d'un panneau photovoltaïque :

Soit le système mécanique électrique ci-dessus qui modélise le mouvement d'un panneau photovoltaïque avec un moteur à courant continu selon l'angle de la position des rayons du soleil α. Le panneau tourne autour de l'axe (OO') avec l'aide du moteur. À $t = 0$, le panneau est au repos $(\theta = 0)$.



Les paramètres du système sont :

Paramètre	Symbole	Unité
Angle des rayons du soleil	α	rad
Angle du panneau	θ	rad
Tension d'alimentation du moteur	E	V
L'inertie du panneau	J	$kg.m^2$
Constante de couplage mécanique	k_1	Nm/A
Constante de couplage électrique	k_2	Vs/rad
Résistance électrique	R	Ω

Les équations de la position θ et la vitesse de rotation ω du panneau sont données par :

Équation de position (θ)

$$\dot{\theta} - \omega = 0 \tag{1}$$

Équation de vitesse (ω)

$$\dot{\omega} - a\,\omega - b\,E = 0 \tag{2}$$

Avec : $a = -\dfrac{k_1 k_2}{JR}$ et $b = \dfrac{k_1}{JR}$

Partie A : Modélisation et analyse du système

Dans la suite, on pose : $\boldsymbol{\theta = x_1}$, $\boldsymbol{\omega = x_2}$, l'entrée $\boldsymbol{U}$ est la tension électrique $\boldsymbol{E}$. La sortie du système $\boldsymbol{Y}$ sera la position du panneau $\boldsymbol{\theta}$.

A.1 A partir des équations **(1)** et **(2)**, établir en fonction de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ le modèle d'état du système sous la forme : **1pt**

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX \end{aligned}$$

A.2 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $\boldsymbol{A}$ ainsi que ses valeurs propres. **1pt**

A.3 Etudier la stabilité du système ? **1pt**

A.4 Calculer la matrice de commandabilité $\mathscr{C}$ du système ainsi que $\mathbf{det}\,(\mathscr{C})$. Le système est-il commandable ? **1pt**

A.5 (a) Dans le domaine de Laplace, calculer la matrice de transition

$$L_p(e^{At}) = (pI - A)^{-1}$$

En déduire l'expression de $\boldsymbol{e^{At}}$ en fonction de $\boldsymbol{t}$. **2pts**

(b) Pour une entrée échelon unité $\boldsymbol{U = 1V}$, calculer la solution $\boldsymbol{X(t)}$ du vecteur d'état. **3pts**

Partie B : Commande du système

Objectif : On cherche à établir une loi de commande par retour d'état $\boldsymbol{U = H\alpha(t) - KX}$ de manière à imposer les valeurs propres $\boldsymbol{\lambda_1 = -3; \lambda_2 = -5}$, tout en garantissant que l'angle $\boldsymbol{\theta(t)}$ du panneau photovoltaïque suive l'évolution de la consigne $\boldsymbol{\alpha(t)}$, représentant l'angle des rayons du soleil.

B.1 Est-il possible de placer les pôles $\boldsymbol{\lambda_1 = -3}$ et $\boldsymbol{\lambda_2 = -5}$? **1pt**

B.2 Donner la forme des matrices $\boldsymbol{A_c}$ et $\boldsymbol{B_c}$ du modèle d'état sous forme compagne horizontale. **1pt**

B.3 Calculer la matrice de commandabilité du la paire $(\boldsymbol{A_c}, \boldsymbol{B_c})$, notée $\mathscr{C}_{\boldsymbol{c}}$. En déduire la matrice de passage $\boldsymbol{T} = \mathscr{C}_{\boldsymbol{c}}\mathscr{C}^{-1}$ qui permet de transformer le système sous forme compagne horizontale. **2pts**

B.4 Déterminer le polynôme caractéristique désiré. **1pt**

B.5 Calculer le vecteur du retour d'état $\boldsymbol{K^c} = (\boldsymbol{k_1^c},\ \boldsymbol{k_2^c})$ du système sous forme compagne horizontale. **1pt**

B.6 En déduire le vecteur du gain $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2})$ dans la base initiale de $\boldsymbol{X}$. **2pts**

B.7 Calculer le coefficient du pré-réglage $\boldsymbol{H} = \left(-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}$ permettant d'amener la sortie du système à la sortie désirée $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t})$. **2pts**

B.8 Exprimer la commande $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{X}$ en fonction de $\boldsymbol{X}$. **1pt**