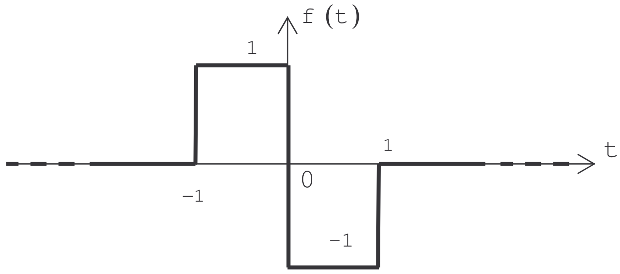
NOM :	Correction TRAITEMENT DU SIGNAL	Note : /22
Durée : 1H50. Calculatrice <u>non autorisée</u> car <u>inutile.</u> Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées <u>littéralement</u> avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 5

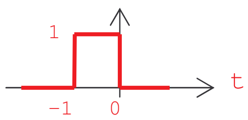
Considérons la fonction f(t) suivante :



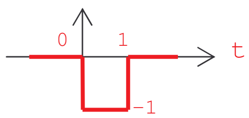
1 **1)** Exprimer f(t) à l'aide des fonctions usuelles.

La fonction f peut être considérée comme la somme des deux fonctions f_1 et f_2 suivantes :

$f_1(t) = \text{rect}(t + 0,5)$



$f_2(t) = -\text{rect}(t - 0,5)$



D'où $\boxed{f(t) = \text{rect}(t + 0,5) - \text{rect}(t - 0,5)}$

1 **2)** Déterminer $F(\nu)$, la transformée de Fourier de f(t).

$$\text{rect}(t + 0,5) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{sinc}(\nu).e^{j2\pi\nu 0,5}$$
$$-\text{rect}(t - 0,5) \xrightarrow{\text{Fourier}} -\text{sinc}(\nu).e^{-j2\pi\nu 0,5}$$

d'où $\boxed{F(\nu) = \text{sinc}(\nu).e^{j\pi\nu} - \text{sinc}(\nu).e^{-j\pi\nu}}$

3) En utilisant les propriétés des fonctions d'autocorrélation et en vous aidant de la question 2, déterminer $C_{ff}(\tau)$, la fonction d'autocorrélation de f.

2 Pour calculer l'autocorrélation de f, on peut faire le calcul direct en faisant apparaître les fonctions f_1 et f_2.

L'énoncé suggère cependant d'utiliser la transformée de Fourier de f. On peut alors exploiter avantageusement le théorème de Wiener Khintchine : $C_{ff}(\tau) \rightarrow S_{ff}(\nu) = F(\nu)F^*(\nu)$

$$F(\nu) = \mathrm{sinc}(\nu).e^{j\pi\nu} - \mathrm{sinc}(\nu).e^{-j\pi\nu}$$

$$F^*(\nu) = \mathrm{sinc}(\nu).e^{-j\pi\nu} - \mathrm{sinc}(\nu).e^{j\pi\nu} \quad \text{d'où}$$

$$S_{ff}(\nu) = \left(\mathrm{sinc}(\nu).e^{j\pi\nu} - \mathrm{sinc}(\nu).e^{-j\pi\nu}\right)\left(\mathrm{sinc}(\nu).e^{-j\pi\nu} - \mathrm{sinc}(\nu).e^{j\pi\nu}\right)$$

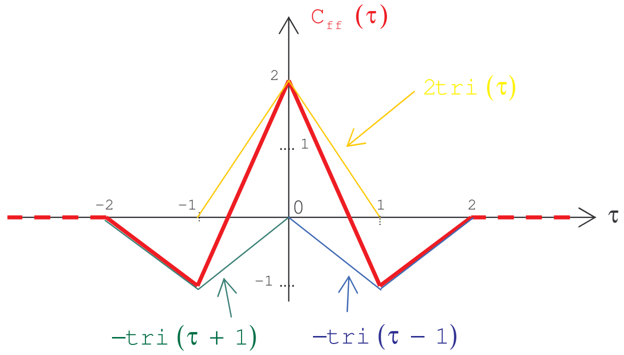
$$S_{ff}(\nu) = 2\mathrm{sinc}^2(\nu) - \mathrm{sinc}^2(\nu)e^{j2\pi\nu} - \mathrm{sinc}^2(\nu)e^{-j2\pi\nu}$$

On en déduit l'autocorrélation par transformée inverse :

$$\boxed{C_{ff}(\tau) = 2\mathrm{tri}(\tau) - \mathrm{tri}(\tau+1) - \mathrm{tri}(\tau-1)}$$

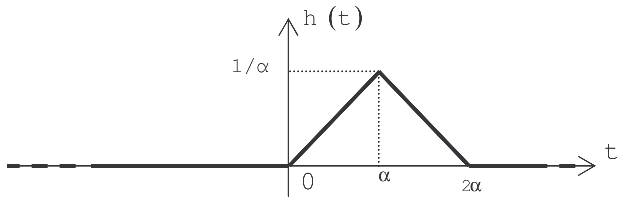
Représenter graphiquement $C_{ff}(\tau)$

1



EXERCICE 2 6,5

Considérons un Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT) ayant pour réponse impulsionnelle la fonction h(t) suivante :



1) Déterminer la fonction de transfert de ce SLIT.

1,5 La fonction de transfert est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

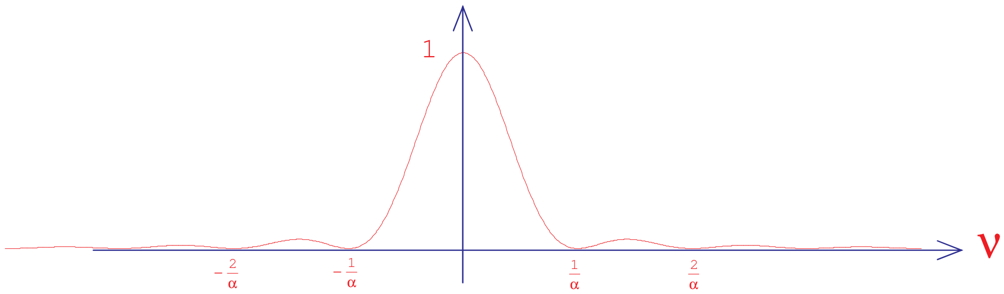
$$h(t) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{tri}\left(\frac{t-\alpha}{\alpha}\right) \quad \text{d'où} \quad H(\nu) = \cancel{\alpha}\frac{1}{\cancel{\alpha}}\mathrm{sinc}^2(\alpha\nu)e^{-j2\pi\nu\alpha}$$

$$\boxed{H(\nu) = \mathrm{sinc}^2(\alpha\nu)e^{-j2\pi\nu\alpha}}$$

Représenter graphiquement le module de cette fonction de transfert.

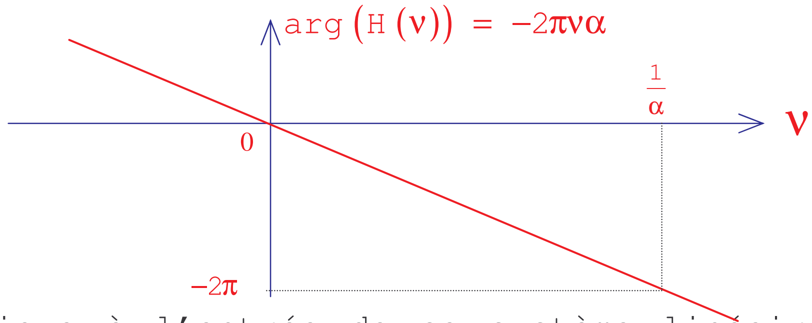
$$|H(\nu)| = \text{sinc}^2(\alpha\nu)$$

0,5



Représenter graphiquement l'argument de cette fonction de transfert.

0,5



On applique à l'entrée de ce système linéaire le signal $e(t) = A + B\cos(2\pi\nu_0 t)$ où A et B sont deux constantes réelles positives.

2) Déterminer par deux méthodes différentes, la réponse s(t) du SLIT à ce signal d'excitation e(t).

Méthode 1 : (Raisonnement utilisant les propriétés des SLITs)

2 Le système étant linéaire, il conserve le caractère sinusoïdal de l'excitation et n'affecte éventuellement que l'amplitude et la phase en fonction de la fréquence de cette excitation. Dans notre cas, e(t) peut se décomposer en deux signaux e_1 et e_2 provoquant chacun les réponses s_1 et s_2.

- $e_1(t) = A = cte$ est un signal d'excitation de fréquence nulle. Pour $\nu = 0$, la fonction de transfert vaut $H(0) = \text{sinc}^2(\alpha 0)\, e^{-j2\pi 0\alpha} = 1$ donc la réponse $s_1(t) = A$.
- $e_2(t) = B\cos(2\pi\nu_0 t)$. Pour $\nu = \nu_0$, la fonction de transfert vaut $H(\nu_0) = \text{sinc}^2(\alpha\nu_0)\, e^{-j2\pi\nu_0\alpha}$. Le module de H affectera l'amplitude du cosinus et l'argument de H modifiera la phase du cosinus. $s_2(t) = B|H(\nu_0)|\cos(2\pi\nu_0 t + \arg(H(\nu_0)))$

  $s_2(t) = B\,\text{sinc}^2(\alpha\nu_0)\cos(2\pi\nu_0 t - 2\pi\nu_0\alpha)$

D'où $\boxed{s(t) = A + B\,\text{sinc}^2(\alpha\nu_0)\cos(2\pi\nu_0(t - \alpha))}$

Méthode 2 : (En utilisant la fonction de transfert et la transformée de Fourier de e(t))

$$E(\nu) = A\delta(\nu) + \frac{B}{2}\left[\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)\right] \quad \text{d'où} \quad S(\nu) = E(\nu)H(\nu)$$

$$S(\nu) = \left[A\delta(\nu) + \frac{B}{2}\left[\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)\right]\right]H(\nu)$$

2 $$S(\nu) = A\delta(\nu)H(\nu) + \frac{B}{2}\delta(\nu-\nu_0)H(\nu) + \frac{B}{2}\delta(\nu+\nu_0)H(\nu)$$

$$S(\nu) = A\delta(\nu)H(0) + \frac{B}{2}\delta(\nu-\nu_0)H(\nu_0) + \frac{B}{2}\delta(\nu+\nu_0)H(-\nu_0)$$

$$\text{d'où} \quad s(t) = AH(0) + \frac{B}{2}H(\nu_0)e^{j2\pi\nu_0 t} + \frac{B}{2}H(-\nu_0)e^{-j2\pi\nu_0 t}$$

$$s(t) = A + \frac{B}{2}\text{sinc}^2(\alpha\nu_0)e^{-j2\pi\nu_0\alpha}e^{j2\pi\nu_0 t} + \frac{B}{2}\text{sinc}^2(-\alpha\nu_0)e^{j2\pi\nu_0\alpha}e^{-j2\pi\nu_0 t}$$

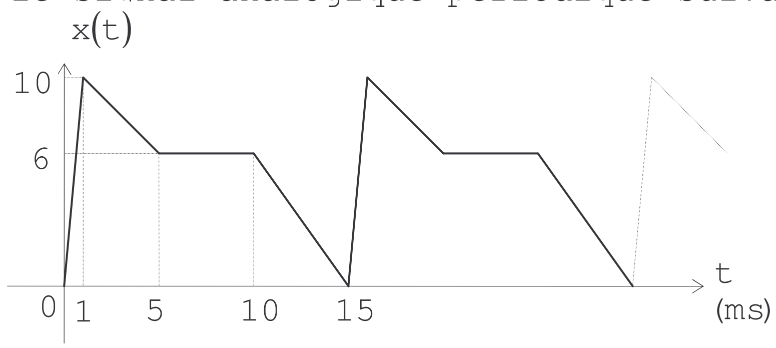
$$s(t) = A + B\text{sinc}^2(\alpha\nu_0)\left[\frac{e^{-j2\pi\nu_0\alpha}e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{j2\pi\nu_0\alpha}e^{-j2\pi\nu_0 t}}{2}\right]$$

$$\boxed{s(t) = A + B\text{sinc}^2(\alpha\nu_0)\cos(2\pi\nu_0(t-\alpha))}$$

EXERCICE 3 3

(Exercice extrait du polycopié de cours SY53)

Considérons le signal analogique périodique suivant:



On désire échantillonner ce signal afin de le traiter numériquement. La fréquence d'échantillonnage a été fixée empiriquement de façon à obtenir au moins 10 échantillons dans la partie la plus raide du signal.

1 **1)** Quelle est, dans ces conditions, la fréquence minimale d'échantillonnage ?

La partie la plus raide du motif dure 1ms. On souhaite acquérir 10 points dans cette partie. Il faut donc une période d'échantillonnage de $T_e = 0{,}1\text{ms}$.

La fréquence d'échantillonnage vaut donc $f_e = 10\text{kHz}$

Dans la pratique le concepteur de la carte a retenu la fréquence d'échantillonnage de $f_e = 25\text{KHz}$. Le convertisseur échantillonneur analogique numérique a été précédé d'un filtre.

2) Quel est le rôle du filtre ?
1 C'est un filtre anti-repliement. (Explication : voir cours)

Quel doit être sa nature (Passe BAS, Passe Haut, Passe Bande, etc...) ?
0,5 Passe-bas

Si on suppose que ce filtre est parfait, comment doit-on choisir sa fréquence de coupure ?
0,5 Si le filtre est idéal (coupure infiniment raide), sa fréquence de coupure vaut $f_c = \frac{f_e}{2} = 12,5\,\text{KHz}$

EXERCICE 4 4

(Exercice extrait du polycopié de cours SY53)
Considérons un Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT) de réponse impulsionnelle h(t) et de fonction de transfert $H(\nu)$.

1) Si y(t) est la réponse du SLIT à l'excitation x(t), calculer $C_{yx}(\tau)$ en fonction de $C_{xx}(\tau)$ et de h(t) (on
2 s'aidera avantageusement du théorème de Wiener-Khintchine)

$C_{yx}(\tau) \rightarrow S_{yx}(\nu) = Y(\nu)\,X^*(\nu)$ or $Y(\nu) = X(\nu)\,H(\nu)$

$S_{yx}(\nu) = H(\nu)\,X(\nu)\,X^*(\nu) = H(\nu)\,S_{xx}(\nu)$

Par transformée inverse,

$$\boxed{C_{yx}(\tau) = h(\tau) * C_{xx}(\tau)}$$

2 **2)** Si x(t) est un bruit blanc de DSP a_0, calculer $C_{yx}(\tau)$.
En déduire une méthode de détermination de la réponse impulsionnelle d'un SLIT sans utiliser d'impulsion.

Si x(t) est un bruit blanc de DSP a_0, alors $C_{xx}(\tau) = a_0\delta(\tau)$

Donc $C_{yx}(\tau) = h(\tau) * a_0\delta(\tau)$

$$\boxed{C_{yx}(\tau) = a_0 h(\tau)}$$

Si on excite un SLIT par un bruit blanc, on peut obtenir la réponse impulsionnelle de ce système (à une constante près) en réalisant l'intercorrélation de la sortie avec l'entrée.

Questions de Cours : 3,5

1 Que pouvez-vous dire de la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance A ? (Expliquez et justifiez)

Sa DSP étant constante, $S_{bb}(\nu) = A \xrightarrow{F^{-1}} C_{bb}(\tau) = A\,\delta(\tau)$
Le bruit blanc ne ressemble qu'à lui-même.
(Pour plus d'informations, voir cours)

1 Que pouvez-vous dire de la fonction d'autocorrélation d'un signal périodique ?

L'autocorrélation d'un signal périodique est un signal périodique de même période contenant toutes les composantes spectrales du signal et seulement celle-ci. La phase est cependant perdue.
(Pour plus d'informations, voir cours)

1,5 On désire détecter la présence d'un signal périodique de période inconnue, noyé dans un très important bruit blanc gaussien. Quelle méthode simple proposez-vous ? (Expliquez et justifiez)

Soit $e_T(t)$ un signal périodique de période T inconnue.
Soit b(t) un bruit blanc gaussien de DSP constante A.
On souhaite vérifier la présence de e_T dans le signal x suivant : $x(t) = e_T(t) + b(t)$
On calcule l'autocorrélation de x :
$C_{xx}(\tau) = C_{e_Te_T}(\tau) + C_{e_Tb}(\tau) + C_{be_T}(\tau) + C_{bb}(\tau)$
$C_{e_Te_T}(\tau)$ est une fonction périodique de période T
$C_{e_Tb}(\tau)$ et $C_{be_T}(\tau)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 en moyenne.
$C_{bb}(\tau) = A\delta(\tau)$
Si on effectue plusieurs réalisations moyennées, l'autocorrélation finale sera composée principalement des termes $C_{e_Te_T}(\tau)$ et $C_{bb}(\tau) = A\delta(\tau)$. Pour détecter la présence de e_T, il suffira d'examiner $C_{xx}(\tau)$ ailleurs qu'en 0 afin d'éviter le dirac.

FORMULAIRE

Convolution : $f*g : \quad t \to (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^2) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max\ dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$

$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$

$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$

$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\, F(\nu)$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{Fourier} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{Fourier} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{Fourier} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{Fourier} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{Fourier} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{Fourier} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{Fourier} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$\mathrm{ech}(t) \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{Fourier} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{Fourier} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t-\tau)] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$