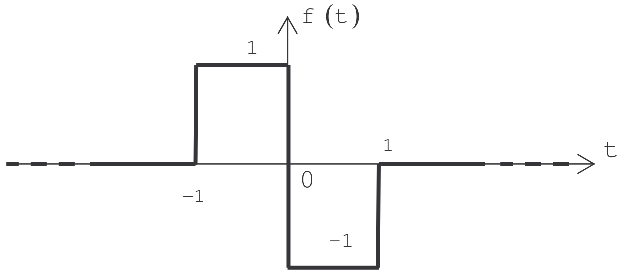
NOM :	TRAITEMENT DU SIGNAL	Note : /22

Durée : 1H50. Calculatrice <u>non autorisée</u> car <u>inutile.</u> Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées <u>littéralement</u> avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 5

Considérons la fonction f(t) suivante :



1 **1)** Exprimer f(t) à l'aide des fonctions usuelles.

1 **2)** Déterminer $F(\nu)$, la transformée de Fourier de f(t).

3) En utilisant les propriétés des fonctions d'autocorrélation et en vous aidant de la question 2, déterminer $C_{ff}(\tau)$, la fonction d'autocorrélation de f.

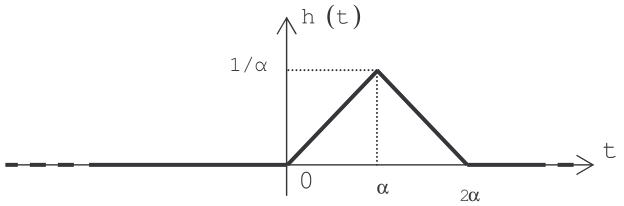
2

Représenter graphiquement $C_{ff}(\tau)$

1

EXERCICE 2 6,5

Considérons un Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT) ayant pour réponse impulsionnelle la fonction h(t) suivante :



1) Déterminer la fonction de transfert de ce SLIT.

1,5

Représenter graphiquement le module de cette fonction de transfert.

0,5

Représenter graphiquement l'argument de cette fonction de transfert.

0,5

On applique à l'entrée de ce système linéaire le signal $e(t) = A + B\cos(2\pi\nu_0 t)$ où A et B sont deux constantes réelles positives.

2) Déterminer par deux méthodes différentes, la réponse s(t) du SLIT à ce signal d'excitation e(t).

Méthode 1 : (Raisonnement utilisant les propriétés des SLITs)

2

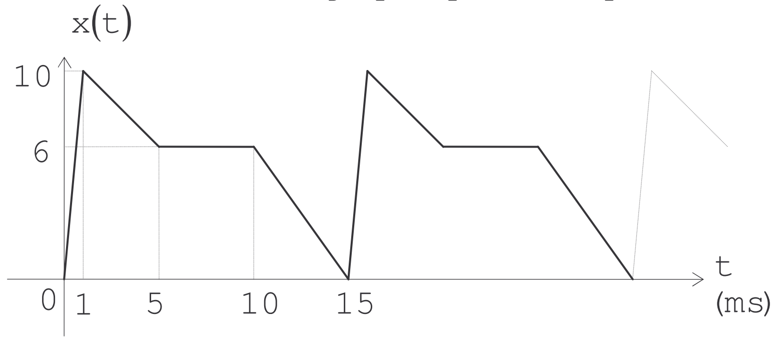
Méthode 2 : (En utilisant la fonction de transfert et la transformée de Fourier de e(t))

2

EXERCICE 3 3

(Exercice extrait du polycopié de cours SY53)

Considérons le signal analogique périodique suivant:



On désire échantillonner ce signal afin de le traiter numériquement. La fréquence d'échantillonnage a été fixée empiriquement de façon à obtenir au moins 10 échantillons dans la partie la plus raide du signal.

1 **1)** Quelle est, dans ces conditions, la fréquence minimale d'échantillonnage ?

Dans la pratique le concepteur de la carte a retenu la fréquence d'échantillonnage de f_e = 25KHz. Le CAN convertisseur échantillonneur analogique numérique a été précédé d'un filtre.

2) Quel est le rôle du filtre ?

1

Quel doit être sa nature (Passe BAS, Passe Haut, Passe Bande, etc...) ?

0,5

Si on suppose que ce filtre est parfait, comment doit-on choisir sa fréquence de coupure ?

0,5

EXERCICE 4 4

(Exercice extrait du polycopié de cours SY53)
Considérons un Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT) de réponse impulsionnelle h(t) et de fonction de transfert $H(\nu)$.

1) Si y(t) est la réponse du SLIT à l'excitation x(t), calculer $C_{yx}(\tau)$ en fonction de $C_{xx}(\tau)$ et de h(t) (on s'aidera avantageusement du théorème de Wiener-Khintchine)

2

2 **2)** Si x(t) est un bruit blanc de DSP a_0, calculer $C_{yx}(\tau)$. En déduire une méthode de détermination de la réponse impulsionnelle d'un SLIT sans utiliser d'impulsion.

Questions de Cours : 3,5

1 Que pouvez-vous dire de la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance A ? (Expliquez et justifiez)

1 Que pouvez-vous dire de la fonction d'autocorrélation d'un signal périodique ?

On désire détecter la présence d'un signal périodique de période inconnue, noyé dans un très important bruit blanc gaussien. Quelle méthode simple proposez-vous ? (Expliquez et justifiez)

1,5

FORMULAIRE

Convolution : $f*g : \quad t \to (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\,g(t-a)\,da$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t)dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t)y^*(t)dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T x_i(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$

Puissance : $P = E(x_i{}^2) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et

$\left(\frac{S}{B}\right)_{max\ dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}}dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\Pi\nu t}dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,e^{j2\Pi\nu t}\,d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu}F(\nu)$

$e^{j2\Pi at}f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F*G$

$f*g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\,F(\nu)$

$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\,F(\nu)$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{Fourier} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{Fourier} 1$$

$$rect(t) \xrightarrow{Fourier} sinc(\nu)$$

$$tri(t) \xrightarrow{Fourier} sinc^2(\nu)$$

$$sinc(t) \xrightarrow{Fourier} rect(\nu)$$

$$sinc^2(t) \xrightarrow{Fourier} tri(\nu)$$

$$sgn(t) \xrightarrow{Fourier} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$ech(t) \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$ie1(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$ie2(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{Fourier} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$ig(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{Fourier} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu)G_T^*(\nu)d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\,dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau)dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\,dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t-\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$