

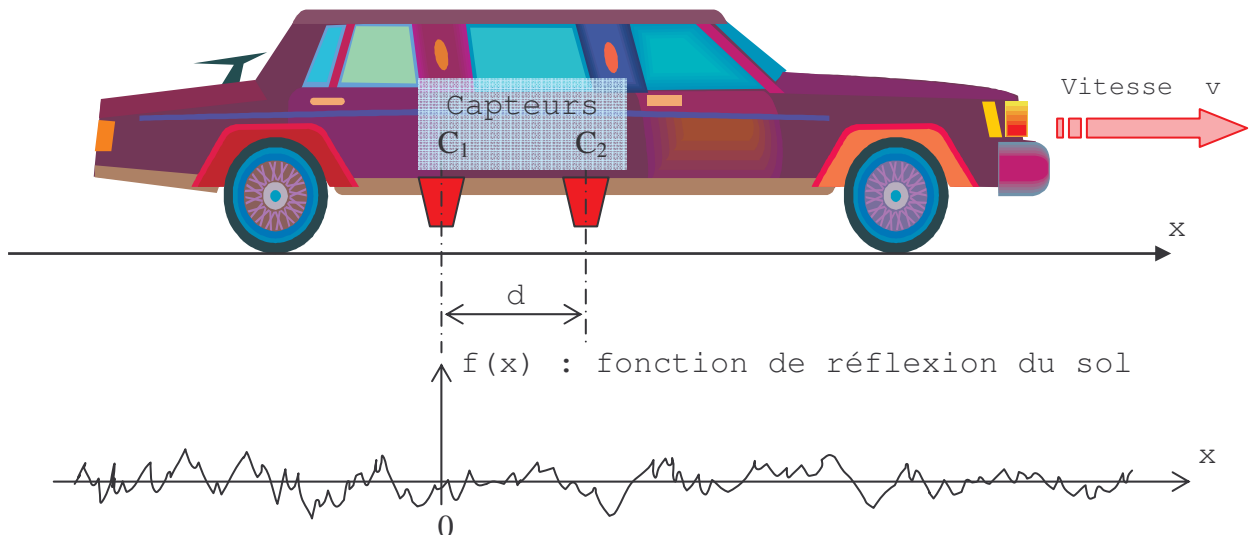
NOM :	<b>Correction</b> <b>TRAITEMENT DU SIGNAL</b>	Note : <input type="text" value="721"/>
Durée : 1H50. Calculatrice <u>non autorisée</u> car <u>inutile</u> . Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

### EXERCICE 1

#### Mesure de vitesse sans contact

Considérons un véhicule se déplaçant à la vitesse  $v$  selon un axe  $x$ . Deux capteurs optiques placés sous la caisse mesurent la réflexion locale du sol en deux endroits séparés d'une distance  $d$  dans l'axe du déplacement.



On considérera que la fonction de réflexion est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance  $A_0$ . On prendra comme origine des temps, l'instant où le capteur 1 du véhicule est positionné en  $x=0$  (cas de la figure).

0,5

1) Calculez  $C_{ff}(\alpha)$  l'autocorrélation de la fonction de réflexion  $f(x)$ .

Comme  $f(x)$  est assimilable à un bruit blanc de DSP constante  $A_0$ , on obtient l'autocorrélation grâce au théorème de Wiener-Kintchine.

$C_{ff}(\alpha)$  est donc la transformée inverse de Fourier de la DSP

D'où  $C_{ff}(\alpha) = A_0 \delta(\alpha)$

1

2) Soient  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  les signaux respectivement fournis par les capteurs  $C_1$  et  $C_2$ . On considérera que les capteurs mesurent la fonction de réflexion  $f(x)$ . Déterminez les expressions de  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ .

$$e_1(t) = f(vt)$$

$$e_2(t) = f(vt + d)$$

2

3) Calculez  $C_{e_1e_2}(\tau)$  l'intercorrélation entre les signaux  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ . (On fera apparaître l'autocorrélation de  $f$ .)

$$C_{e_1e_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_1(t) e_2^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(vt) f(v(t - \tau) + d) dt$$

$C_{e_1e_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(vt) f(vt - v\tau + d) dt$  posons le changement de variable suivant  $u = vt$ , alors  $du = v dt$  d'où

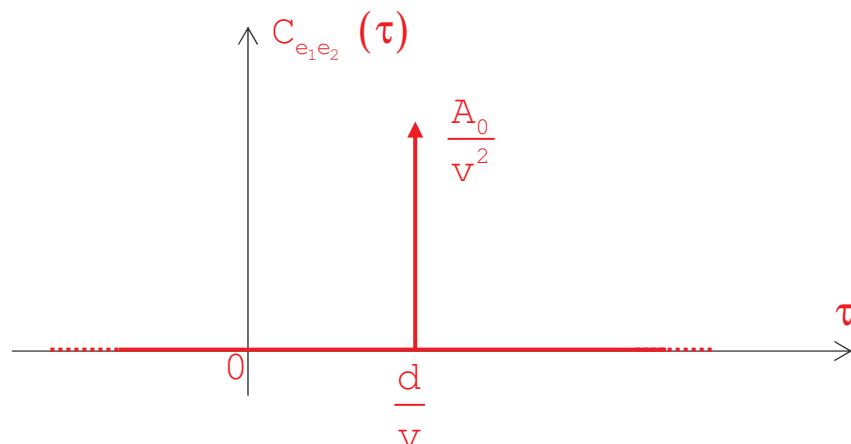
$$C_{e_1e_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) f(u - (v\tau - d)) \frac{du}{v}$$

$$C_{e_1e_2}(\tau) = \frac{1}{v} C_{ff}(v\tau - d) = \frac{1}{v} A_0 \delta(v\tau - d) = \frac{1}{v} A_0 \delta\left(v\left(\tau - \frac{d}{v}\right)\right)$$

$$C_{e_1e_2}(\tau) = \frac{A_0}{v^2} \delta\left(\tau - \frac{d}{v}\right)$$

0,5

Représentez graphiquement  $C_{e_1e_2}(\tau)$ .



1

En déduire une méthode de mesure de vitesse sans contact. (Expliquez)

On réalise l'intercorrélation des signaux  $e_1$  et  $e_2$  puis en recherchant l'abscisse du maximum on obtient la grandeur  $\frac{d}{v}$

$d$  étant connue, on en déduit la vitesse  $v$ .

**EXERCICE 2** 3

(Exercice extrait du polycopié de cours SY53)  
 Considérons le signal réel  $x(t)$  composé d'un signal périodique de période  $T$  noyé dans du bruit blanc gaussien.  
 $x(t) = e_T(t) + b(t)$

2 **1)** Calculez  $C_{xx}(\tau)$  l'autocorrélation de  $x(t)$

Commenter chacun des termes de  $C_{xx}(\tau)$ .

L'autocorrélation de  $x$  fait apparaître 4 termes :

$$C_{xx}(\tau) = C_{e_T e_T}(\tau) + C_{e_T b}(\tau) + C_{b e_T}(\tau) + C_{bb}(\tau)$$

$C_{e_T e_T}(\tau)$  est une fonction périodique de période  $T$

$C_{e_T b}(\tau)$  et  $C_{b e_T}(\tau)$  sont des fonctions qui tendent vers 0 en moyenne.

$$C_{bb}(\tau) = A\delta(\tau)$$

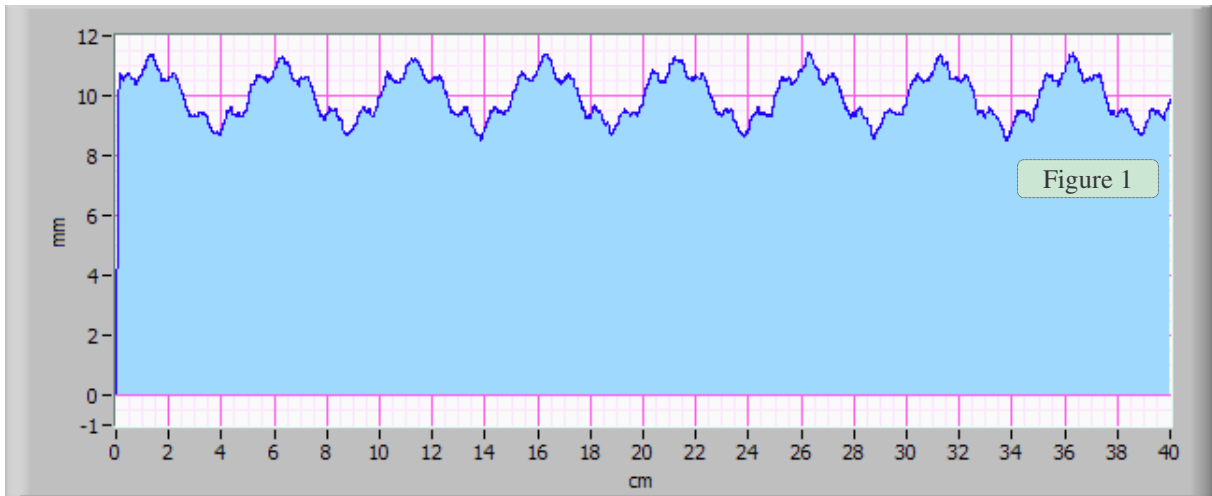
1 **2)** En déduire une méthode pour détecter un signal périodique noyé dans du bruit blanc.

Si on effectue plusieurs réalisations moyennées, l'autocorrélation finale sera composée principalement des termes  $C_{e_T e_T}(\tau)$  et  $C_{bb}(\tau) = A\delta(\tau)$ . Pour détecter la présence de  $e_T$ , il suffira d'examiner  $C_{xx}(\tau)$  ailleurs qu'en 0 afin d'éviter le dirac. On remarquera alors une fonction périodique de période  $T$  confirmant ainsi la présence, dans le signal  $x(t)$ , d'une fonction périodique de même période.

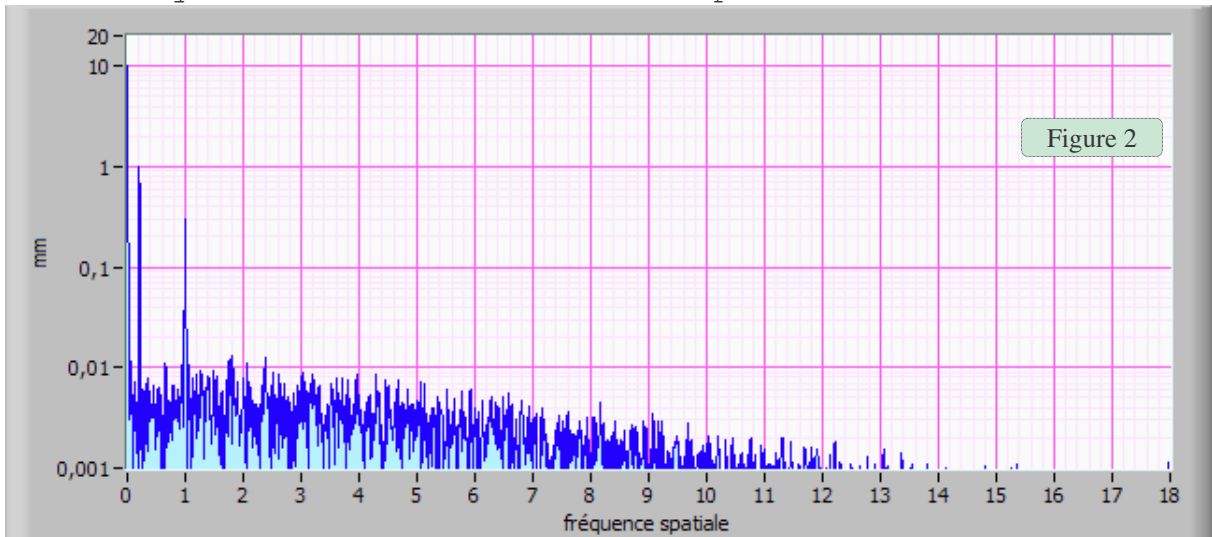
**EXERCICE 3**

5

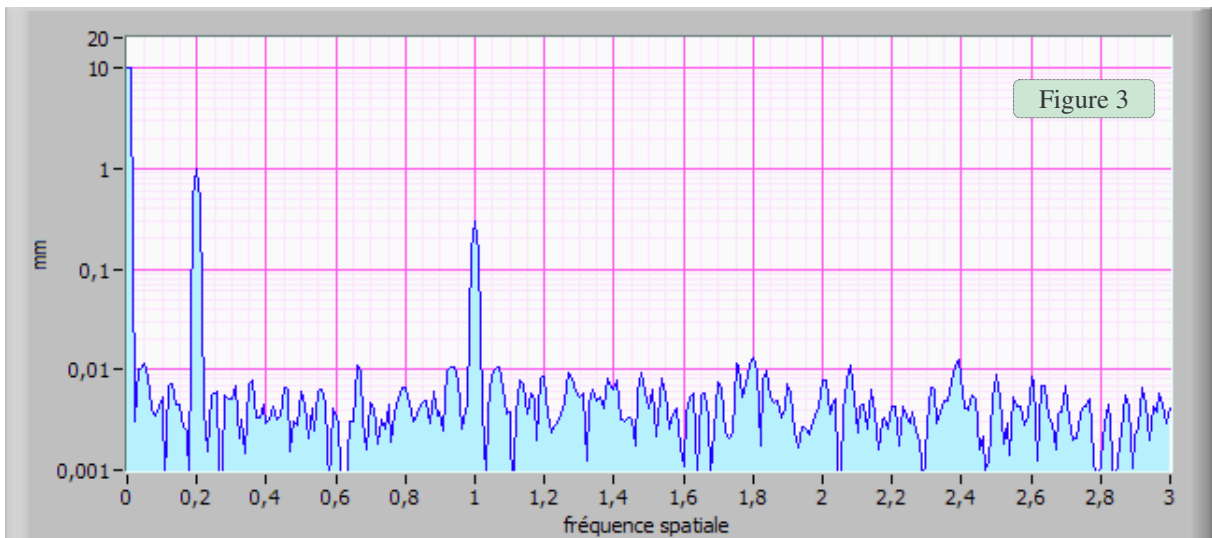
Un dispositif de mesure de profil de pièce a fourni la courbe suivante :



Une analyse de Fourier révèle le spectre suivant :



Zoom entre 0 et 3 :



0,5 **1)** Quelle est l'unité d'abscisse des figures 2 et 3.

L'unité est l'inverse d'une longueur. Pour savoir s'il s'agit de  $m^{-1}$ ,  $cm^{-1}$  ou  $mm^{-1}$  il suffit d'identifier une des raies spectrales. La figure 1 révèle une large ondulation de période  $\approx 5cm$  donc la fréquence fondamentale de cette ondulation est d'environ  $\approx \frac{1}{5} cm^{-1} = 0,2 cm^{-1}$ . Ce qui est confirmé par la raie spectrale d'abscisse 0,2.

L'unité est donc  $cm^{-1}$ .

**2)** Commentez qualitativement et quantitativement le spectre obtenu. Expliquez la forme globale du spectre ainsi que les 3 raies remarquables.

1,5 Le spectre contient :

- 1 raie de fréquence nulle d'amplitude 10mm correspondant à la valeur moyenne du signal.
- 1 raie de fréquence  $0,2 cm^{-1}$  d'amplitude 1mm
- 1 raie de fréquence  $1 cm^{-1}$  d'amplitude 0,3mm.
- 1 bruit de fond spectral s'atténuant à partir d'environ  $5 cm^{-1}$ .

Les deux dernières raies proviennent vraisemblablement du procédé d'obtention de la pièce.

Le bruit de fond peut avoir plusieurs origines :

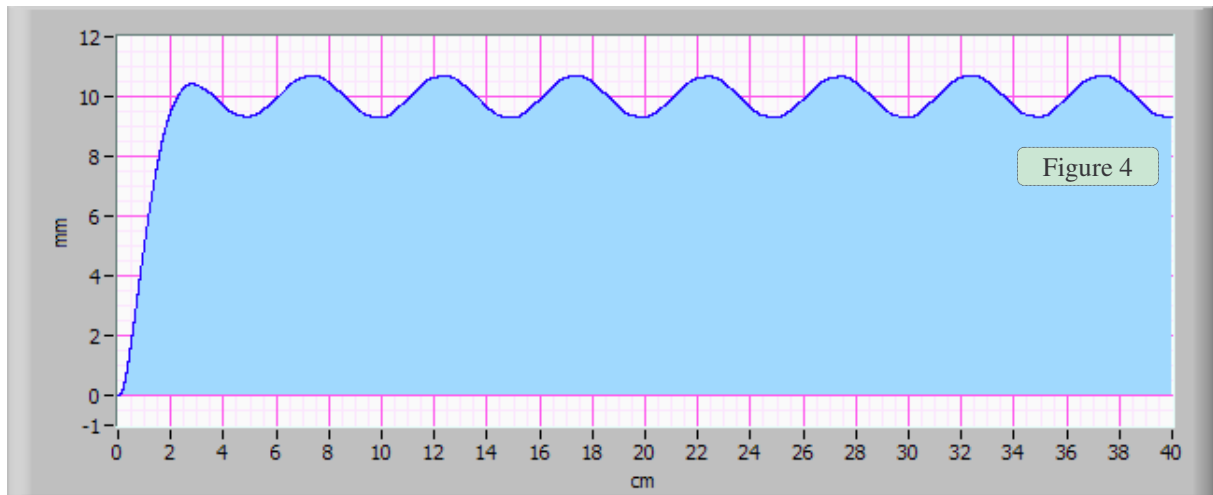
- Petites irrégularités dans la coupe
- Bruits des capteurs et de la chaîne de mesure.

On remarque que l'ensemble du spectre semble filtré par un passe-bas. Ce filtrage est l'action cumulée des différents éléments de la chaîne de mesure (structure mécanique généralement globalement passe-bas, capteur + ampli + acquisition nécessairement passe-bas)

1 **3)** En vous aidant des figures 1, 2 et 3, déterminez la hauteur moyenne de la pièce ? Expliquez votre méthode.

La hauteur moyenne de la pièce correspond à la composante spectrale de fréquence nulle. Son amplitude est de 10mm.

Afin de mettre en évidence l'ondulation principale de la pièce, nous avons traité le signal de la figure 1 pour obtenir la figure 4 suivante :



1,5

4) Quel traitement a pu être utilisé pour réaliser la figure 4. (Définir qualitativement et quantitativement ce traitement)

Le traitement appliqué est un filtrage passe-bas conservant les fréquences de 0 à au moins  $0,2 \text{ cm}^{-1}$ . La bande coupée du filtre commence au plus tard avant  $1 \text{ cm}^{-1}$  afin de couper la deuxième raie spectrale. On suppose que le filtre choisi est de type Bessel de façon à ce que le déphasage introduit n'engendre qu'un décalage pur constant de toutes les composantes spectrales de la bande passante.

0,5

5) Pourquoi les ondulations ne sont plus en phase avec celle de la figure 1 ?

Le déphasage est provoqué par le filtre passe-bas. Comme il s'agit d'un filtre à variable d'espace, il aurait été possible de filtrer sans déphaser en employant un filtre à réponse impulsionnelle paire. La non causalité n'étant pas un obstacle pour ce type de variable.

### Questions de Cours :

8

2

1) Exposer une méthode permettant de déterminer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire sans utiliser d'impulsion de Dirac.

(Détails : voir cours SLIT et Corrélation)

Il en existe plusieurs : voir exercices du poly de cours sur les SLIT et sur la corrélation.

A titre indicatif, on peut rappeler l'une d'entre elles : On peut attaquer un système linéaire avec du bruit blanc et réaliser l'intercorrélation entre la sortie et l'entrée. On obtient ainsi, à une constante près, la réponse impulsionnelle du système.

2) Quelle propriété mathématique doit avoir la fonction de transfert d'un filtre qui ne déphase pas.

La fonction de transfert doit être réelle pure.

0,5

En déduire la propriété mathématique nécessaire et suffisante que doit avoir la réponse impulsionnelle d'un tel filtre.

1

Si la fonction de transfert est réelle, alors la réponse impulsionnelle est paire

Peut-on réaliser de tels filtres ? (justifier et expliquer)

1

- Si la variable est le temps, le filtre n'est pas réalisable car sa réponse impulsionnelle n'est pas causale.
- Si la variable n'est pas le temps et que la causalité ne pose pas de problème d'impossibilité, le filtre est alors réalisable.

3) Qu'est-ce qu'un filtre à phase linéaire ?

C'est un filtre dont le déphasage est proportionnel à la fréquence. Le déphasage apparaît alors comme un retard pur.

1

Quel peut être l'intérêt d'utiliser un tel filtre.

Lorsque la variable est le temps, les impératifs de causalité imposent à tous les filtres de déphaser chaque composante spectrale. Le déphasage est donc inévitable.

1

Si le déphasage est proportionnel à la fréquence, il n'y aura pas de distorsion de phase car toutes les composantes spectrales de la bande passante seront retardées du même temps.

4) Dans une chaîne d'acquisition de données, l'échantillonneur est toujours précédé d'un filtre. Expliquez son rôle, et donnez ses caractéristiques (type de filtre, bande passante, début de la bande coupée, etc..)

1,5

(Détails : Voir cours d'échantillonnage)

Pour mémoire :

C'est un filtre anti-repliement dont le rôle est d'éliminer les fréquences qui ne seraient pas échantillonnées dans le respect des règles de Shannon. Ce filtre passe-bas borne le support du spectre du signal à échantillonner. Sa bande passante doit contenir l'intégralité des composantes spectrales que l'on juge essentielles. Le début de sa bande coupée matérialise la fréquence qui sert au calcul de la fréquence minimale d'échantillonnage.

## FORMULAIRE

Convolution :  $f * g : t \rightarrow (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) g(t - a) da$

Energie totale :  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T :  $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

**Signaux aléatoires :**

Moyenne :  $\text{moy} = E(x_i) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance :  $P = E(x_i^2) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification :  $\left(\frac{S}{B}\right)_{\text{max}} = 12.2^{2N-3}$  et

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{\text{max dB}} = 6,02.N + 1,76 \text{ dB}$$

**Décomposition en série de Fourier :**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right) \right]$$

avec  $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right) dt$  et  $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right) dt$

ou  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi n t}{T}}$  avec  $\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi n t}{T}} dt$  et  $\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

**Transformation de Fourier :**

$$X(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi v t} dt \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) e^{j2\Pi v t} dv}$$

**Quelques propriétés de la transformée de Fourier.**

$$f(at) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{v}{a}\right)$$

$$f(-t) \xrightarrow{\text{TF}} F(-v)$$

$$f^*(t) \xrightarrow{\text{TF}} F^*(-v)$$

$$f(t - a) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-j2\Pi a v} F(v)$$

$$e^{j2\Pi a t} f(t) \xrightarrow{\text{TF}} F(v - a)$$

$$f \times g \xrightarrow{\text{TF}} F * G$$

$$f * g \xrightarrow{\text{TF}} F \times G$$

$$f'(t) \xrightarrow{\text{TF}} j2\Pi v F(v)$$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\text{TF}} (j2\Pi v)^n F(v)$$



$$f(t) \xrightarrow{\text{TF}} F(v) \xrightarrow{\text{TF}} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(v)|^2 dv$$

Transformée des signaux périodiques : 
$$F(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - v\right)$$

Autres propriétés :

f(t)	F(v)
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

**Quelques Transformées de Fourier.**

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(v)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\text{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{sinc}(v)$$

$$\text{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{sinc}^2(v)$$

$$\text{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{rect}(v)$$

$$\text{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{tri}(v)$$

$$\text{sgn}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} -\frac{j}{\pi v}$$

$$\text{ech}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2} \delta(v) - \frac{j}{2\pi v}$$

$$\text{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi v}$$

$$\text{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi v)^2}$$

$$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi v^2}$$

$$\cos(2\pi ft) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2} (\delta(v - f) + \delta(v + f))$$

**Signaux à énergie finie :**

$$\text{DSE} : S_{ff}(v) = |F(v)|^2 \quad \text{DSEI} : S_{fg}(v) = F(v)G^*(v)$$

**Signaux à énergie non finie :**

$$\text{DSP} : S_{ff}(v) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{T} |F_T(v)|^2 \right)$$

pour les fonctions périodiques 
$$S_{ff}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(v - \frac{n}{T}\right)$$

$$\text{DSPI} : S_{fg}(v) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{T} F_T(v)G_T^*(v) \right)$$

**Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie**

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

**Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie**

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

**Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires**

$$C_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t - \tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t - \tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

**Formules d'Euler.**

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{1}{2j} (e^{jx} - e^{-jx})$$

**Formules de trigonométrie.**

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\text{Dirac} \quad \begin{cases} \forall t \neq 0 & \delta(t) = 0 \\ \delta(0) = +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$$