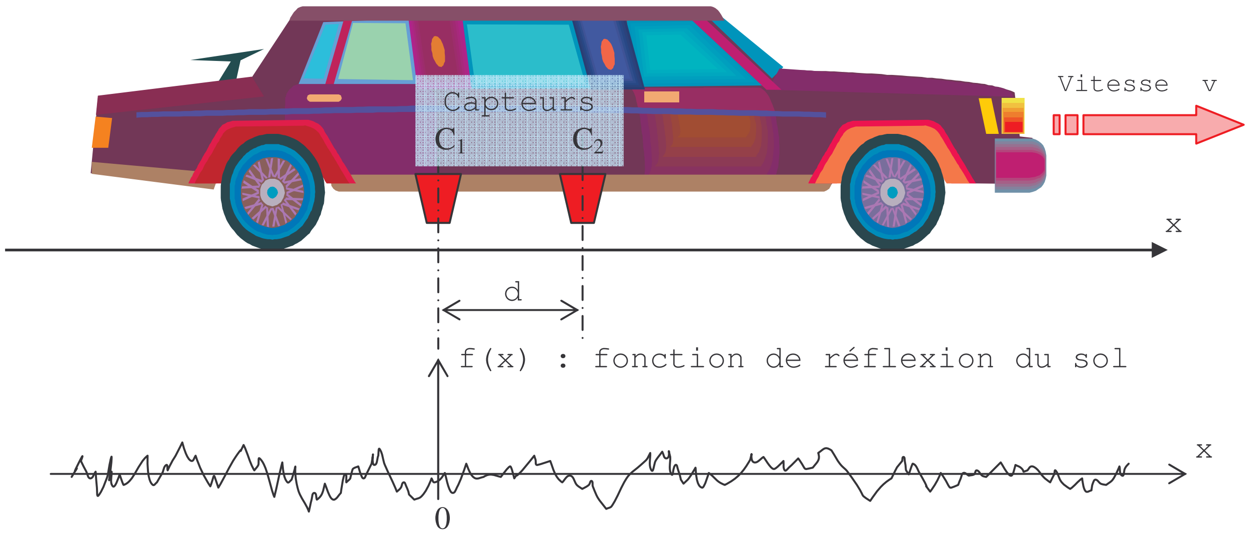
NOM :	TRAITEMENT DU SIGNAL	Note : /21
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 5

Mesure de vitesse sans contact

Considérons un véhicule se déplaçant à la vitesse v selon un axe x. Deux capteurs optiques placés sous la caisse mesurent la réflexion locale du sol en deux endroits séparés d'une distance d dans l'axe du déplacement.



On considérera que la fonction de réflexion est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance A_0.

On prendra comme origine des temps, l'instant où le capteur 1 du véhicule est positionné en x=0 (cas de la figure).

0,5 **1)** Calculez $C_{ff}(\alpha)$ l'autocorrélation de la fonction de réflexion f(x).

1 **2)** Soient $e_1(t)$ et $e_2(t)$ les signaux respectivement fournis par les capteurs C_1 et C_2. On considérera que les capteurs mesurent la fonction de réflexion $f(x)$.
Déterminez les expressions de $e_1(t)$ et $e_2(t)$.

2 **3)** Calculez $C_{e_1e_2}(\tau)$ l'intercorrélation entre les signaux $e_1(t)$ et $e_2(t)$. (On fera apparaître l'autocorrélation de f.)

0,5 Représentez graphiquement $C_{e_1e_2}(\tau)$.

1 En déduire une méthode de mesure de vitesse sans contact. (Expliquez)

EXERCICE 2 3

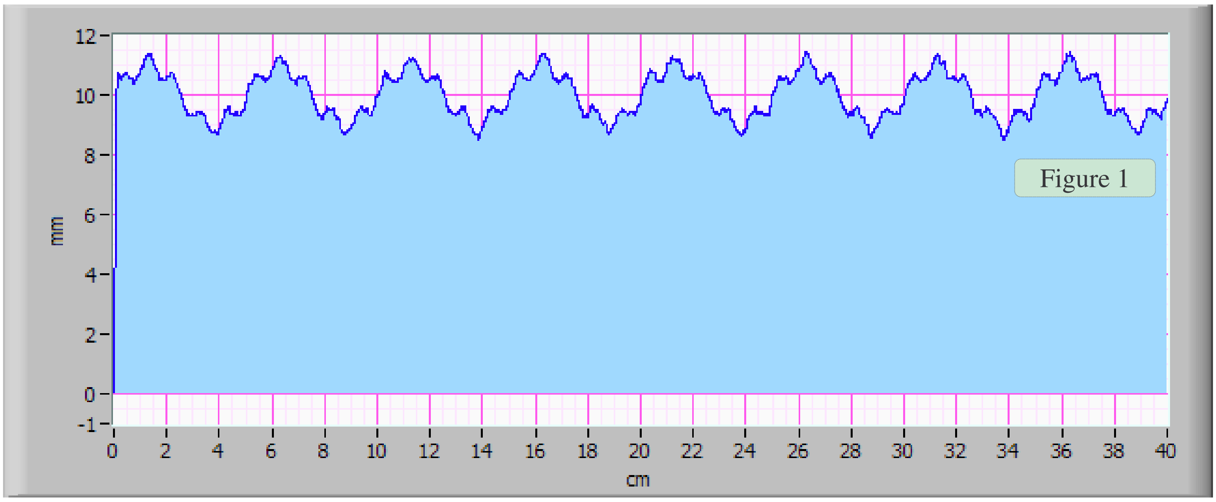
(Exercice extrait du polycopié de cours SY53)
Considérons le signal réel x(t) composé d'un signal périodique de période T noyé dans du bruit blanc gaussien.
$x(t) = e_T(t) + b(t)$

2 **1)** Calculez $C_{xx}(\tau)$ l'autocorrélation de x(t)
Commenter chacun des termes de $C_{xx}(\tau)$.

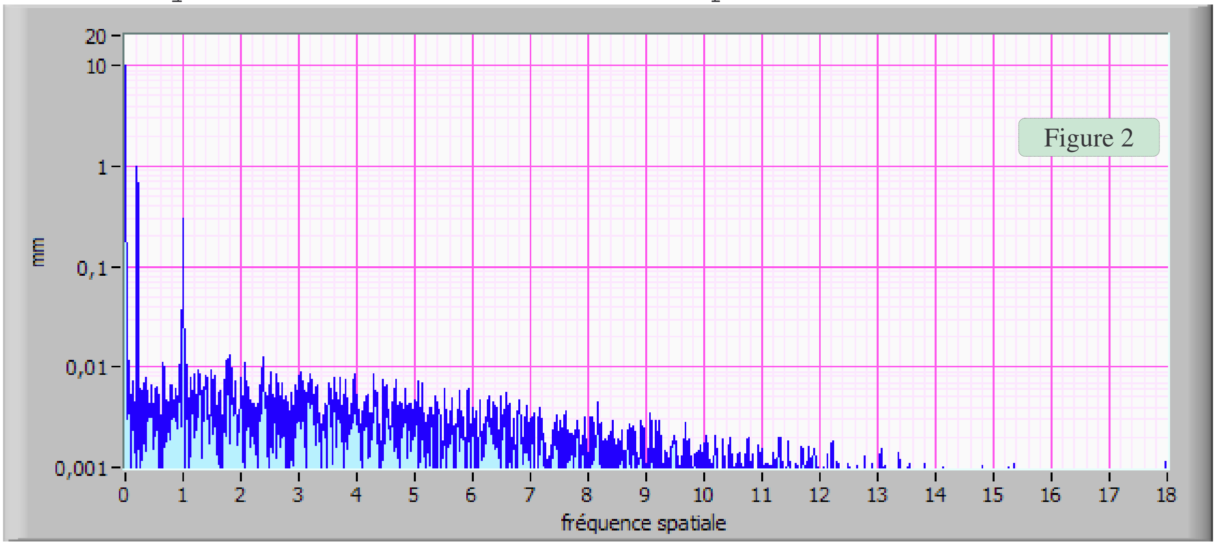
1 **2)** En déduire une méthode pour détecter un signal périodique noyé dans du bruit blanc.

EXERCICE 3 5

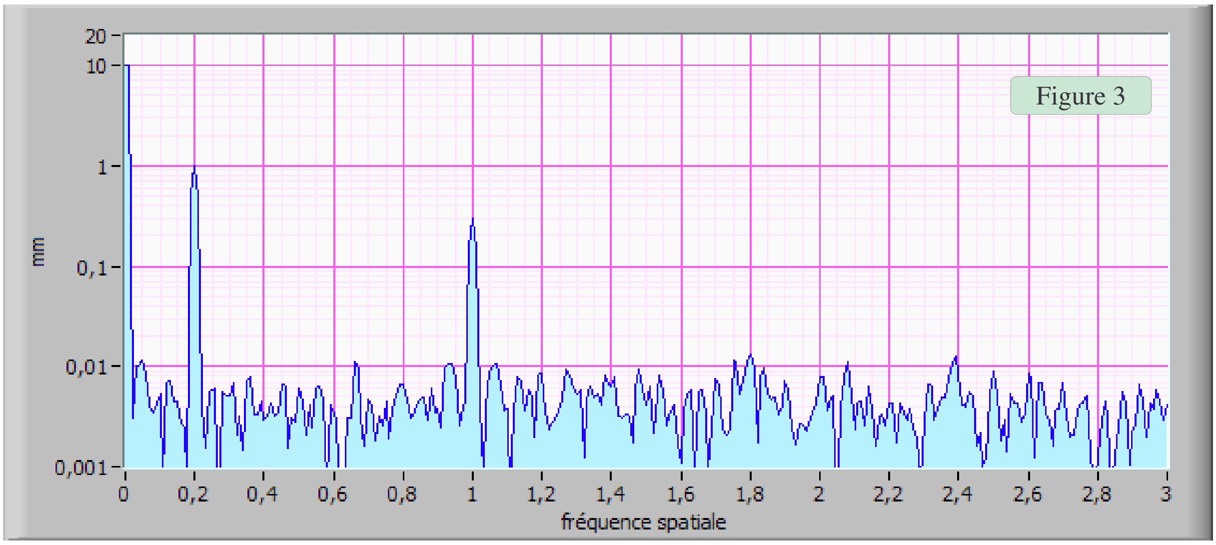
Un dispositif de mesure de profil de pièce a fourni la courbe suivante :



Une analyse de Fourier révèle le spectre suivant :



Zoom entre 0 et 3 :



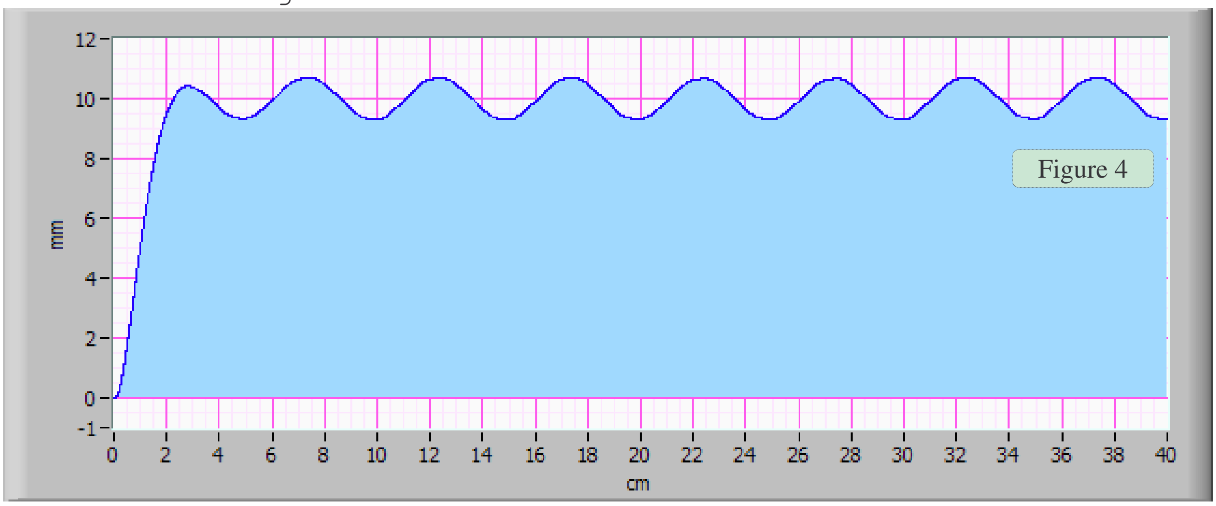
0,5 **1)** Quelle est l’unité d’abscisse des figures 2 et 3.

2) Commentez qualitativement et quantitativement le spectre obtenu. Expliquez la forme globale du spectre ainsi que les 3 raies remarquables.

1,5

1 **3)** En vous aidant des figures 1, 2 et 3, déterminez la hauteur moyenne de la pièce ? Expliquez votre méthode.

Afin de mettre en évidence l’ondulation principale de la pièce, nous avons traité le signal de la figure 1 pour obtenir la figure 4 suivante :



1,5

4) Quel traitement a pu être utilisé pour réaliser la figure 4. (Définir qualitativement et quantitativement ce traitement)

0,5

5) Pourquoi les ondulations ne sont plus en phase avec celle de la figure 1 ?

Questions de Cours : 8

2

1) Exposer une méthode permettant de déterminer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire sans utiliser d'impulsion de Dirac.

2) Quelle propriété mathématique doit avoir la fonction de transfert d'un filtre qui ne déphase pas.

0,5

En déduire la propriété mathématique nécessaire et suffisante que doit avoir la réponse impulsionnelle d'un tel filtre.

1

Peut-on réaliser de tels filtres ? (justifier et expliquer)

1

3) Qu'est-ce qu'un filtre à phase linéaire ?

1

Quel peut être l'intérêt d'utiliser un tel filtre.

1

4) Dans une chaine d'acquisition de données, l'échantillonneur est toujours précédé d'un filtre. Expliquez son rôle, et donnez ses caractéristiques (type de filtre, bande passante, début de la bande coupée, etc..)

1,5

FORMULAIRE

Convolution : $f*g$: $t \rightarrow (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^2) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max\, dB} = 6{,}02.N + 1{,}76 \text{ dB}$$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$

$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$

$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$

$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\, F(\nu)$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$\mathrm{ech}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \underset{T\to+\infty}{\mathrm{Lim}}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \underset{T\to+\infty}{\mathrm{Lim}}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t - \tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \operatorname{Lim}_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau)\, dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t - \tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t - \tau)] = \operatorname{Lim}_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a + b) + \cos(a - b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a + b) + \sin(a - b)\right]$$

Dirac $\begin{cases} \forall t \neq 0 \quad \delta(t) = 0 \\ \delta(0) = +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$f(t)\,\delta(t - t_0) = f(t_0)\,\delta(t - t_0)$$