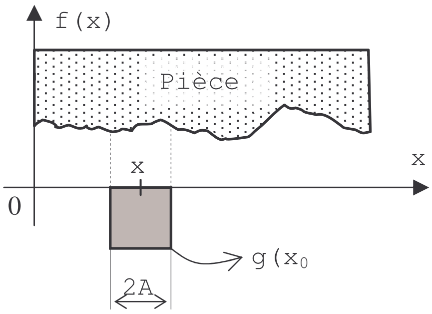
NOM :	TRAITEMENT DU SIGNAL	Note : 20,5/20
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 5,5

Considérons un capteur de profil dont le principe physique mesure la distance moyenne qui sépare sa fenêtre de mesure de la pièce dont on veut obtenir le profil.



f(x) représente la distance entre la pièce et le capteur.
$g(x_0)$ est le signal fourni par le capteur lorsqu'il est positionné en x_0. $g(x_0)$ représente alors la distance moyenne entre la pièce et la fenêtre de mesure de largeur 2A du capteur.

0,5 **1)** Exprimer la fonction $g(x_0)$.

1,5 **2)** Montrer que $g(x_0)$ peut s'écrire comme le produit de convolution de la fonction f(x) avec une fonction h(x) que l'on déterminera.

3) Déduire de la question précédente que g peut être considéré comme la réponse d'un filtre au signal d'excitation f.

0,5

Déterminer alors la fonction de transfert harmonique $T(\nu)$ de ce filtre.

1,5

Représenter graphiquement le module de $T(\nu)$.

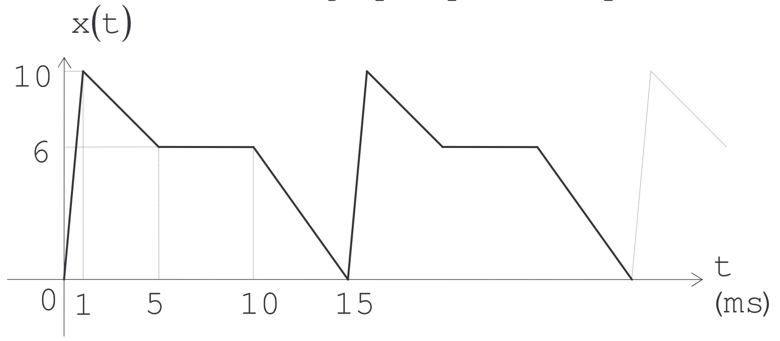
1

Y-a-t-il des fréquences spatiales pour lesquelles la fonction de transfert est nulle ? Expliquez l'impact que cela peut avoir sur la mesure du profil de la pièce.

0,5

EXERCICE 2 3

(Exercice extrait du polycopié de cours SY53)
Considérons le signal analogique périodique suivant:



On désire échantillonner ce signal afin de le traiter numériquement. La fréquence d'échantillonnage a été fixée empiriquement de façon à obtenir au moins 10 échantillons dans la partie la plus raide du signal.

1 **1)** Quelle est, dans ces conditions, la fréquence minimale d'échantillonnage ?

Dans la pratique le concepteur de la carte a retenu la fréquence d'échantillonnage de $f_e = 25 KHz$. Le CAN convertisseur échantillonneur analogique numérique a été précédé d'un filtre.

2) Quel est le rôle du filtre ?

1

Quel doit être sa nature (Passe BAS, Passe Haut, Passe Bande, etc...) ?

0,5

Si on suppose que ce filtre est parfait, comment doit-on choisir sa fréquence de coupure ?

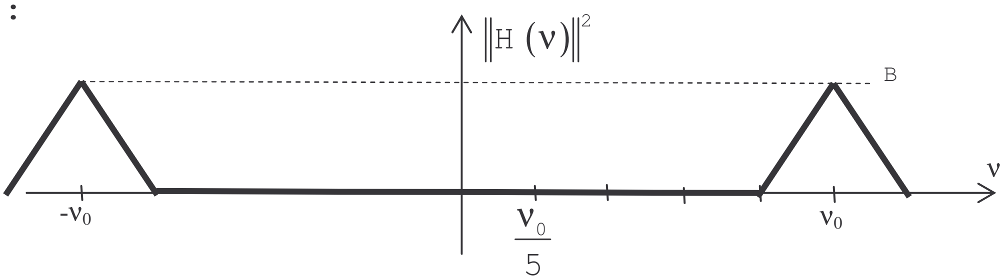
0,5

EXERCICE 3 4,5

Considérons un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance A.

1 **1)** Déterminer sa fonction d'autocorrélation $C_{bb}(\tau)$

Ce bruit blanc est ensuite filtré par un filtre dont le module carré de la fonction de transfert $H(\nu)$ a l'allure suivante :



2) Déterminer alors la fonction d'autocorrélation $C_{yy}(\tau)$ du signal y(t) en sortie du filtre.

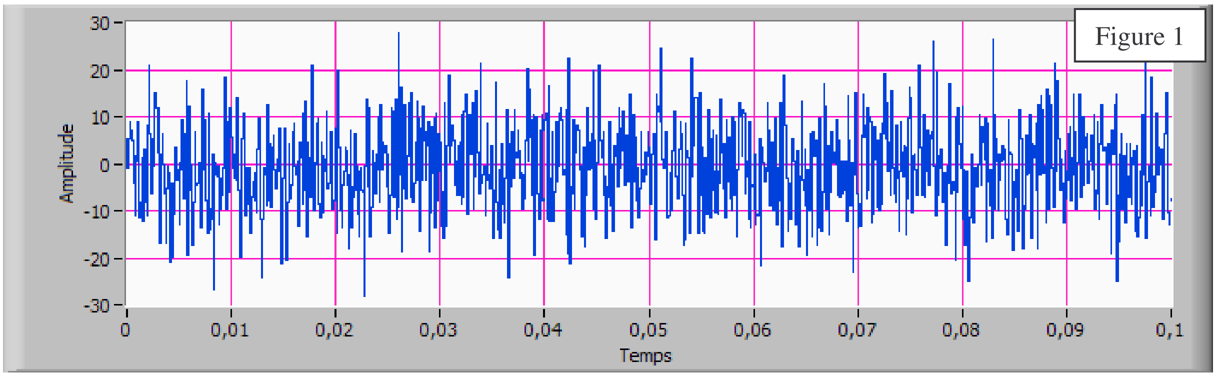
2,5

Représenter graphiquement $C_{yy}(\tau)$.

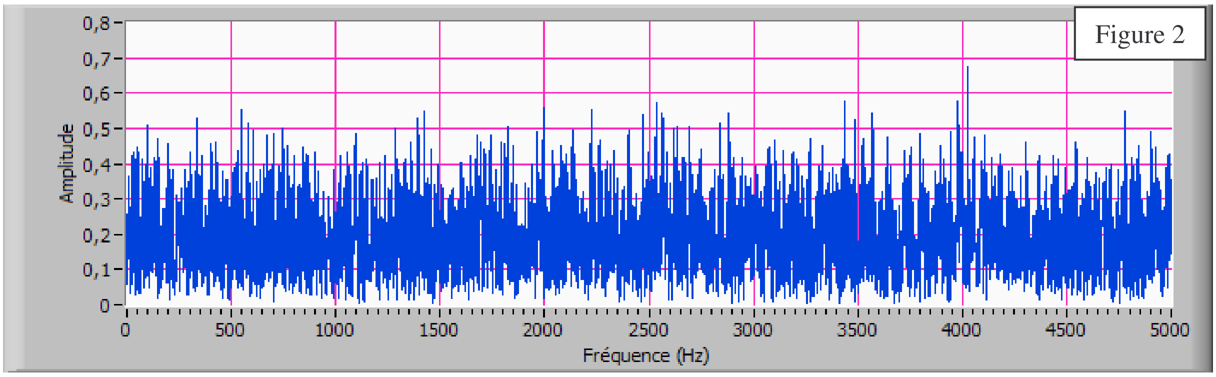
1

EXERCICE 4 3

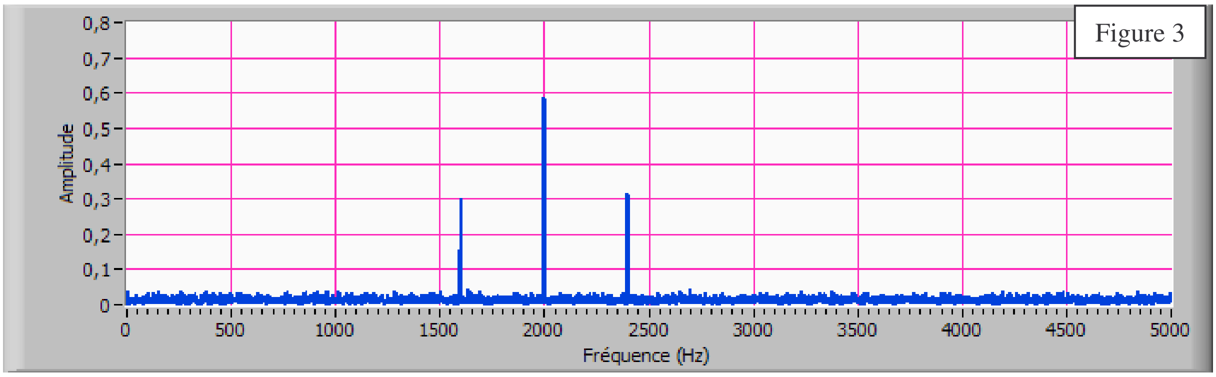
Sur une machine nous avons relevé le signal suivant :



Une analyse spectrale d'amplitude fournit le spectre suivant :



Après quelques moyennes, le spectre devient :



0,5 **1)** Commenter qualitativement le spectre de la figure 2.

1

2) Commenter qualitativement le spectre de la figure 3 Pourquoi le fond de spectre (sans les 3 raies) est-il quasiment constant ?

1,5

3) Commenter qualitativement et quantitativement les trois raies spectrales visibles sur la figure 3. (Le spectre est un spectre unilatéral d'amplitude crête).

Questions de Cours : 4,5

1) On désire détecter la présence d'un signal périodique de période inconnue, noyé dans un très important bruit blanc gaussien. Quelles méthodes simples proposez-vous ? Proposer deux méthodes. (Expliquez et
1,5 justifiez)

Méthode 1 :

1,5 Méthode 2 :

1,5 **2)** Expliquez quelles caractéristiques doit posséder un signal x(t) pour pouvoir être échantillonné correctement sans perte d'information **sans respecter** le théorème de Shannon.

FORMULAIRE

Convolution : $f * g : \quad t \rightarrow (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^{\ 2}) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et

$\left(\frac{S}{B}\right)_{max\ dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) \right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$

$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$

$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$

$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\, F(\nu)$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{Fourier} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{Fourier} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{Fourier} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{Fourier} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{Fourier} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{Fourier} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{Fourier} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$\mathrm{ech}(t) \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{Fourier} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{Fourier} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \operatorname{Lim}_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E\left[x(t)y^*(t-\tau)\right] = \operatorname{Lim}_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Dirac $\begin{cases} \forall t \neq 0 \qquad \delta(t) = 0 \\ \delta(0) = +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$$