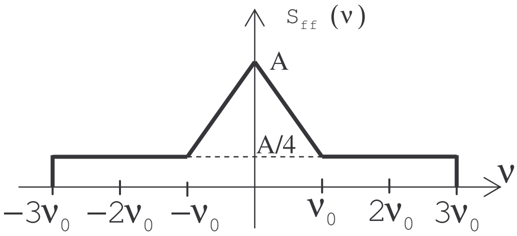
NOM :	Correction **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /21
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 5

Considérons un signal f(t) ayant pour densité spectrale d'énergie la fonction $S_{ff}(\nu)$ suivante :



1 **1)** Déterminer E_f, l'énergie totale du signal f.

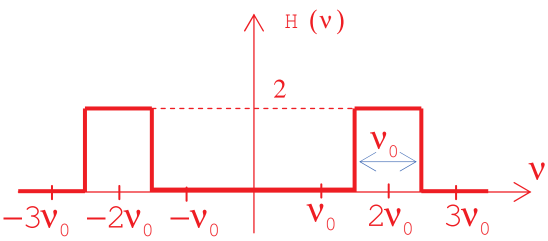
Comme $S_{ff}(\nu)$ est une densité spectrale d'énergie, il suffit d'intégrer sur $\mathbb{R}$ pour obtenir l'énergie totale :

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\nu)\, d\nu = \text{l'aire sous la courbe}$$

$$E_f = \frac{A}{4} 6\nu_0 + \nu_0 \frac{3A}{4} \quad \text{d'où} \quad \boxed{E_f = \frac{9A\nu_0}{4}}$$

Ce signal f est appliqué à l'entrée d'un filtre passe-bande idéal de gain 2 et de bande passante ν_0 centrée sur $+2\nu_0$ et $-2\nu_0$.

1 **2)** Déterminer la fonction de transfert harmonique $H(\nu)$ de ce filtre idéal.



$$\boxed{H(\nu) = 2\,\text{rect}\left(\frac{\nu - 2\nu_0}{\nu_0}\right) + 2\,\text{rect}\left(\frac{\nu + 2\nu_0}{\nu_0}\right)}$$

3) Déterminer la densité spectrale d'énergie $S_{YY}(\nu)$ du signal y(t) à la sortie du filtre.

1,5 $S_{yy}(\nu) = Y(\nu)\,Y^*(\nu) = F(\nu)\,H(\nu)\,F^*(\nu)\,H^*(\nu)$

$S_{yy}(\nu) = S_{ff}(\nu)\,|H(\nu)|^2$

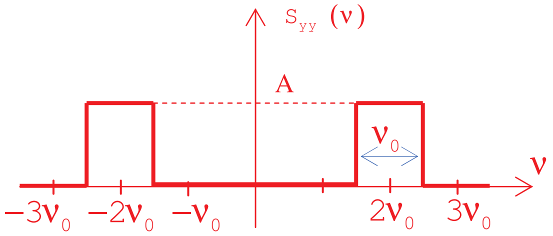
On remarque cependant que dans la bande passante du filtre idéal, $S_{ff}(\nu) = \frac{A}{4}$.

d'où $S_{yy}(\nu) = \frac{A}{4}\left[2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu - 2\nu_0}{\nu_0}\right) + 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu + 2\nu_0}{\nu_0}\right)\right]^2$

$$\boxed{S_{yy}(\nu) = A\left[\mathrm{rect}\left(\frac{\nu - 2\nu_0}{\nu_0}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{\nu + 2\nu_0}{\nu_0}\right)\right]}$$

Représenter graphiquement $S_{YY}(\nu)$

0,5



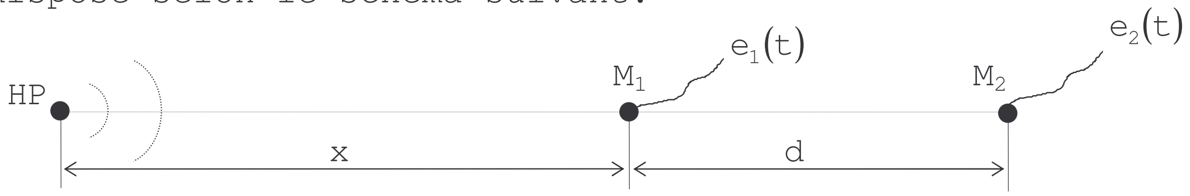
Déterminer E_y l'énergie totale du signal y(t).

1 $$\boxed{E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(\nu)\,d\nu = 2A\nu_0}$$

EXERCICE 2 3,5

(Exercice extrait partiellement des annales)

Un groupe d'étudiants réalise au laboratoire une expérience mettant en œuvre un haut-parleur (HP supposé parfait) excité par un bruit blanc (noté $b(t)$) et deux microphones M_1 et M_2 que l'on supposera parfaits fournissant les signaux $e_1(t)$ et $e_2(t)$. L'ensemble est disposé selon le schéma suivant:



- La célérité du son dans le milieu de propagation de l'expérience sera notée C.
- On supposera que le milieu de propagation ne déforme pas les sons.
- Le bruit blanc $b(t)$ a une DSP constante: $S_{bb}(\nu) = A$.

1 **1)** Déterminer la fonction d'autocorrélation $C_{bb}(\tau)$ du bruit blanc $b(t)$. Interpréter la réponse.

Selon le théorème de Wiener Khintchine, $C_{bb}(\tau)$ est la transformée inverse de Fourier de $S_{bb}(\nu)$.

Comme $S_{bb}(\nu) = A$, alors $\boxed{C_{bb}(\tau) = A\,\delta(\tau)}$

Le bruit blanc ne ressemble qu'à lui-même. Il n'est corrélé qu'avec lui-même.

1 **2)** Déterminer les signaux $e_1(t)$ et $e_2(t)$ (on appellera α_1 et α_2 les coefficients d'atténuation en M_1 et M_2).

$$e_1(t) = \alpha_1 b\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{et} \quad e_2(t) = \alpha_2 b\left(t - \frac{x+d}{c}\right)$$

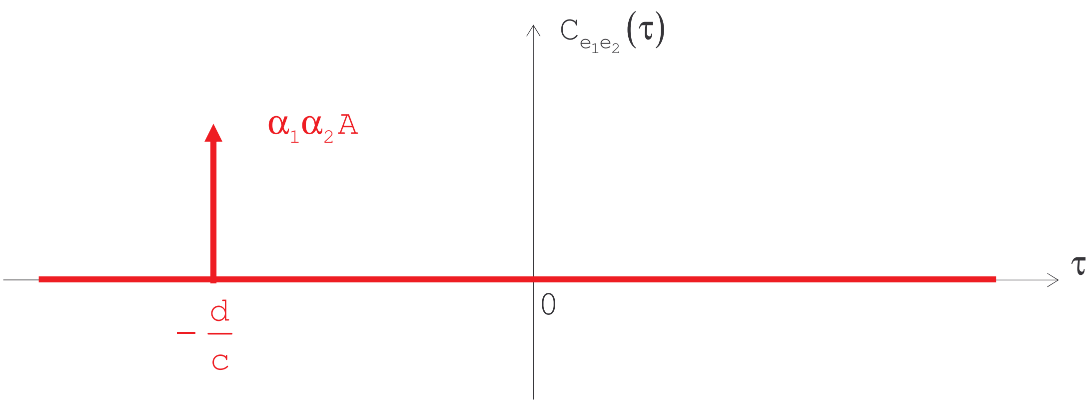
1,5 **3)** Calculer l'intercorrélation $C_{e_1e_2}(\tau)$ entre les signaux $e_1(t)$ et $e_2(t)$.

$$C_{e_1e_2}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e_1(t)\, e_2(t-\tau)\, dt = \alpha_1\alpha_2 \int_{\mathbb{R}} b\left(t - \frac{x}{c}\right) b\left(t - \frac{x+d}{c} - \tau\right) dt$$

$$C_{e_1e_2}(\tau) = \alpha_1\alpha_2 \int_{\mathbb{R}} b(u)\, b\left(u - \left(\tau + \frac{d}{c}\right)\right) du = \alpha_1\alpha_2 C_{bb}\left(\tau + \frac{d}{c}\right)$$

$$\boxed{C_{e_1e_2}(\tau) = \alpha_1\alpha_2\, A\, \delta\left(\tau + \frac{d}{c}\right)}$$

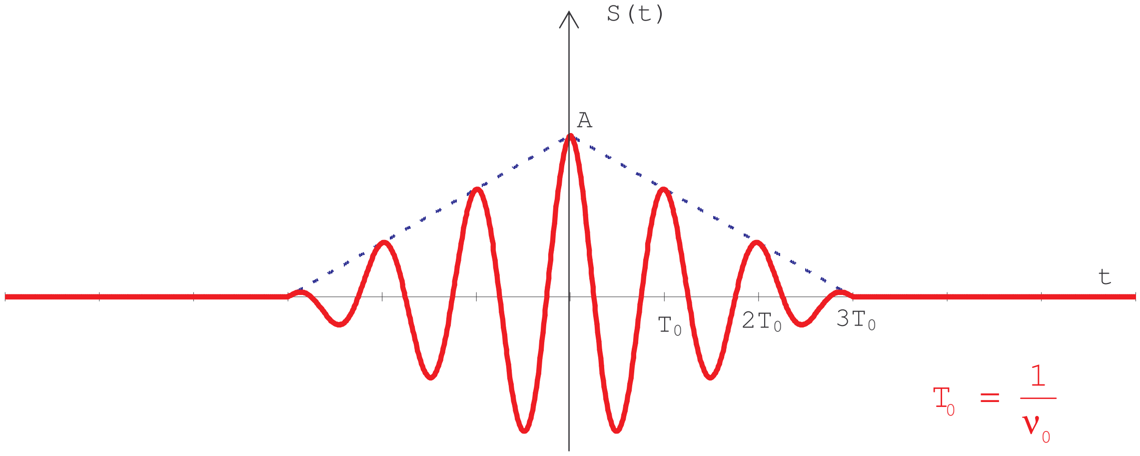
Représenter graphiquement l'allure de $C_{e_1e_2}(\tau)$.



EXERCICE 3 3

Considérons le signal $s(t) = f(t) \cdot g(t)$ constitué du signal sinusoïdal $f : t \to f(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$ que l'on observe à travers une fenêtre triangulaire $g : t \to g(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{t\nu_0}{3}\right)$.

1 **1)** Représenter graphiquement s(t).



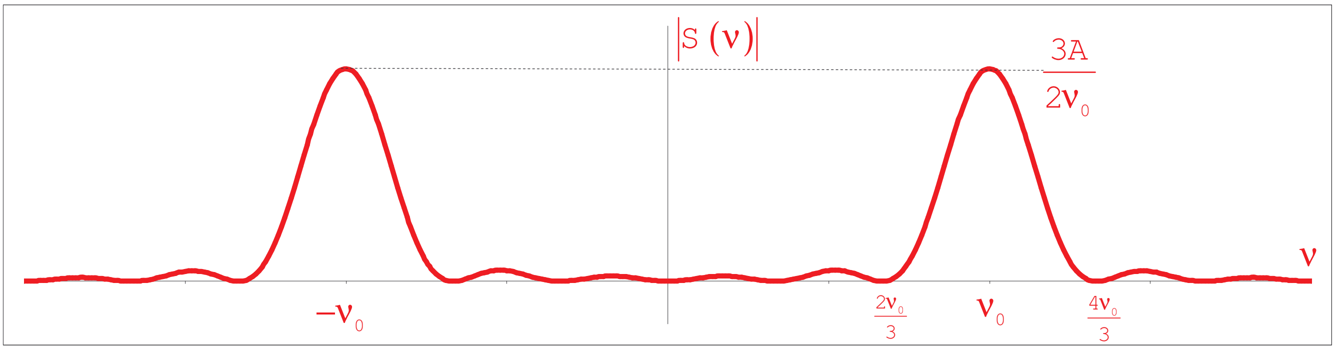
2) Déterminer $S(\nu)$, la transformée de Fourier de s(t).

$$S(\nu) = F(\nu) * G(\nu)$$

1 Or $F(\nu) = \frac{A}{2}\left(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\right)$ et $G(\nu) = \frac{3}{\nu_0}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3\nu}{\nu_0}\right)$

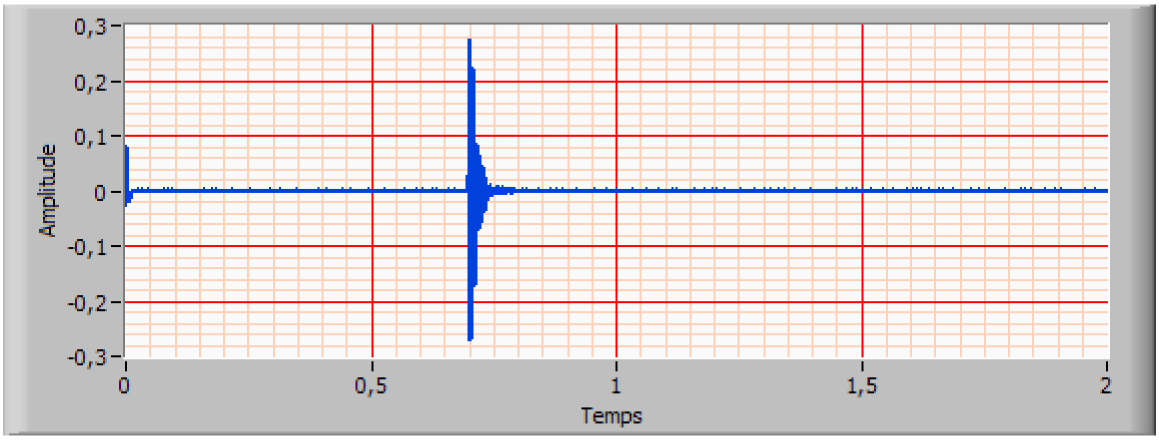
D'où $\boxed{S(\nu) = \frac{3A}{2\nu_0}\left[\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3(\nu - \nu_0)}{\nu_0}\right) + \mathrm{sinc}^2\left(\frac{3(\nu + \nu_0)}{\nu_0}\right)\right]}$

1 **3)** Représenter graphiquement $|S(\nu)|$

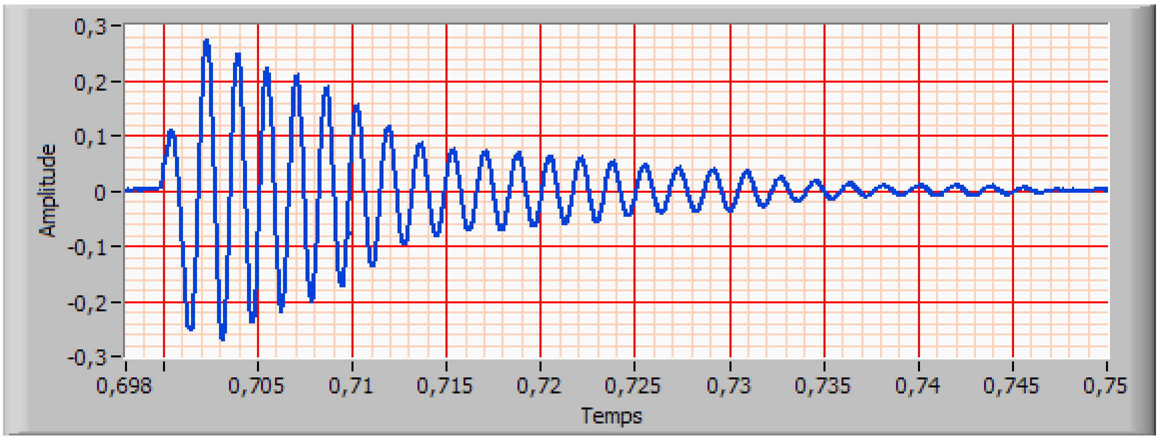


EXERCICE 4 4

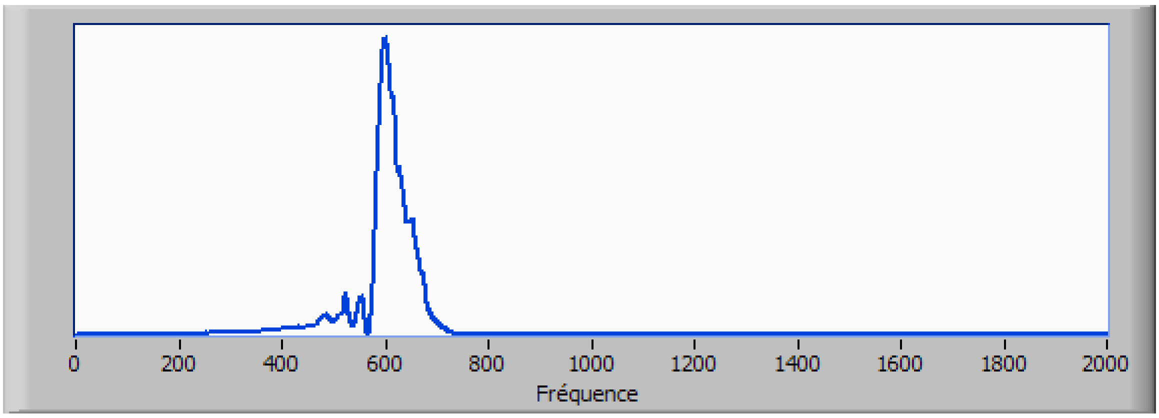
Considérons le signal f(t) suivant :



Un zoom fait apparaître les détails suivants :



Sa densité spectrale de puissance est :



On souhaite échantillonner ce signal.

2,5 **1)** En tenant compte des particularités de ce signal, proposer deux méthodes qui permettent de déterminer les paramètres d'échantillonnage. Expliquer ces deux méthodes sans effectuer les calculs.

Les paramètres d'échantillonnage à déterminer sont la fréquence d'échantillonnage et le filtrage anti repliement.

La fréquence d'échantillonnage F_e se détermine en respectant les règles de Shannon (bien qu'ici, le signal ayant un spectre à bande étroite, il serait possible de ne pas respecter les règles de Shannon sous certaines conditions).
Pour déterminer F_e, il est donc nécessaire de connaître la limite fréquentielle utile du spectre du signal.
En général nous avons deux approches classiques différentes :

1. Réaliser un modèle mathématique simplifié du signal afin de déterminer par un calcul approché son spectre. En déduire la bande de fréquence utile sur des critères principalement énergétiques. Limiter le spectre réel au spectre utile par filtrage anti repliement. Puis appliquer les règles de Shannon sur cette limite fréquentielle supérieure.
2. Mesurer, si cela est possible, le spectre du signal puis en déduire la bande de fréquence utile sur des critères principalement énergétiques. Limiter le spectre réel au spectre utile par filtrage anti repliement. Puis appliquer les règles de Shannon sur cette limite fréquentielle supérieure.

1,5 **2)** Développer la méthode de votre choix pour déterminer les paramètres d'échantillonnage.

Comme l'énoncé nous donne la densité spectrale de puissance du signal, nous appliquerons la deuxième méthode décrite précédemment.
La bande de fréquence utile semble se terminer vers 700Hz. Nous placerons donc un filtre anti repliement passe-bas dont la bande passante se termine à 700Hz. Nous choisirons ensuite la fréquence d'échantillonnage. Elle doit être supérieure à 2 fois la fréquence à laquelle le filtre a une atténuation jugée suffisante pour réjecter les fréquences indésirables. Si le filtre était idéal (cas d'école), sa fréquence de coupure serait de 700Hz et $F_e \geq 1400$Hz.

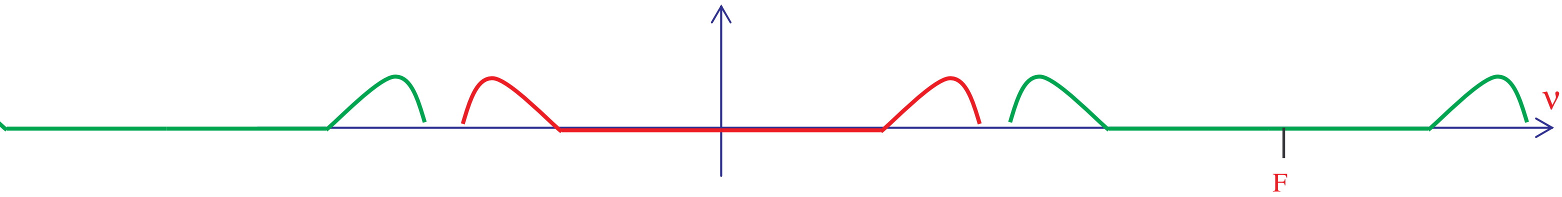
On notera que dans ce cas précis, comme le spectre du signal est à bande limitée, nous pouvons prendre un filtre passe bande comme filtre anti repliement. Il permettra ainsi d'améliorer le rapport signal/bruit.

Questions de Cours : 5,5

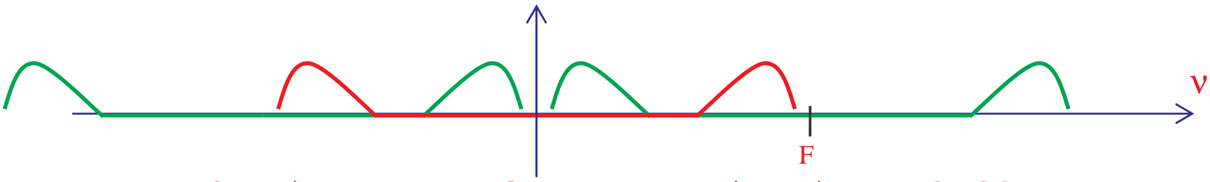
1,5 **1)** Est-il possible d'échantillonner un signal sans perte d'information en ne respectant pas le théorème de Shannon (Expliquez et justifiez)

OUI ! Si le signal est à bande étroite, c'est-à-dire que son spectre n'occupe qu'une bande étroite éloignée de zéro, il est possible de ne pas respecter le théorème de Shannon sans pour autant perdre d'information. En effet, lors de l'échantillonnage, le spectre du signal échantillonné est constitué du spectre du signal d'origine répété tous les multiples de la fréquence d'échantillonnage. Si on ne respecte pas le théorème de Shannon, il y aura empiétement des spectres. Cependant si l'empiètement a lieu dans les parties vides du spectre du signal d'origine, le chevauchement ne sera pas destructeur d'information.

Shannon respecté



Shannon non respecté



Dans ce dernier cas, la reconstitution s'effectue par filtrage passe-bande.

1,5 **2)** Quels liens y a-t-il entre l'échantillonnage idéal et la modulation d'amplitude ? (expliquer et argumenter)

L'échantillonnage idéal est obtenu en multipliant le signal à échantillonner avec un peigne de Dirac.

$$x_e(t) = x(t) \cdot \text{Ш}_{T_e}(t)$$

La modulation d'amplitude dite « sans porteuse » est obtenue en multipliant le signal modulant par une porteuse

$$s(t) = e(t) \cdot p(t)$$

En examinant ces deux définitions on remarque que l'échantillonnage peut être interprété comme une opération de modulation d'amplitude dont la porteuse est un peigne de Dirac.

2,5 **3)** Soit $f_A(x)$ un signal périodique de période A représentant une force en Newton en fonction d'une distance en mètre :
Quelles propriétés remarquables a la fonction d'autocorrélation $C_{f_A f_A}(\tau)$?
L'autocorrélation d'un signal périodique est un signal périodique de même période contenant toutes les composantes spectrales du signal (en module au carré) et seulement celle-ci. La phase est cependant perdue.
(Pour plus d'informations, voir cours)

Quelle est l'unité de τ ?
τ a la même unité que x. τ est donc en mètre dans notre exercice.

Quelle est l'unité de $C_{f_A f_A}(\tau)$?
Dans le cas des fonctions périodiques,

$$C_{f_A f_A}(\tau) = \frac{1}{A}\int_{-\frac{A}{2}}^{+\frac{A}{2}} f_A(x)\, f_A^*(x-\tau)\, dx .$$

L'unité sera donc N^2.

Que représente $C_{f_A f_A}(0)$?
$C_{f_A f_A}(0)$ représente la puissance moyenne du signal sur une période.