NOM :	**Correction** **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /20
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

Questions de Cours : 5

Autocorrélation :

1 **1)** Que savez-vous sur l'autocorrélation d'un bruit blanc de DSP A_0 ? (expliquer et argumenter)

L'autocorrélation est la transformée inverse de Fourier de la Densité spectrale de puissance (théorème de Wiener-Khintchine). Or la DSP du bruit blanc est une constante (ici A_0) d'où : $\boxed{C_{bb}(\tau) = A_0\delta(\tau)}$

2,5 **2)** Soit $f_A(x)$ un signal périodique de période A représentant une force en Newton. La variable x représente une distance en mètre.

Quelles propriétés remarquables a la fonction d'autocorrélation $C_{f_Af_A}(\tau)$?

L'autocorrélation d'un signal périodique est un signal périodique de même période contenant toutes les composantes spectrales du signal (en module au carré) et seulement celle-ci. La phase est cependant perdue.
(Pour plus d'informations, voir cours)

Quelle est l'unité de τ ?

τ a la même unité que la variable x. C'est donc des mètres dans notre cas

Quelle est l'unité de $C_{f_Af_A}(\tau)$?

$f_A(x)$ étant une fonction périodique supposée d'énergie totale non finie, il est nécessaire de prendre la définition suivante : $C_{f_Af_A}(\tau) = \frac{1}{A}\int_{-\frac{A}{2}}^{+\frac{A}{2}} f_A(x)\cdot f_A^*(x-\tau)\,dx$

L'unité de $C_{f_Af_A}(\tau)$ sera donc N^2.

Que représente $C_{f_Af_A}(0)$?

$C_{f_Af_A}(0)$ représente la puissance moyenne du signal $f_A(x)$.

1,5

3) Considérons le signal x(t) composé de $e_T(t)$ une fonction périodique de période T noyée dans du bruit blanc b(t) de DSP A_0. $x(t) = e_T(t) + b(t)$

Que pouvez-vous dire de $C_{xx}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de x(t) ?

L'autocorrélation de x se décomposera en 4 termes :

$C_{xx}(\tau) = C_{e_Te_T}(\tau) + C_{e_Tb}(\tau) + C_{be_T}(\tau) + C_{bb}(\tau)$

$C_{e_Te_T}(\tau)$ est une fonction périodique de période T

$C_{e_Tb}(\tau)$ et $C_{be_T}(\tau)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 en moyenne.

$C_{bb}(\tau) = A_0\delta(\tau)$

Si on effectue plusieurs réalisations moyennées, l'autocorrélation finale sera composée principalement des termes $C_{e_Te_T}(\tau)$ et $C_{bb}(\tau) = A_0\delta(\tau)$.

En pratique, le bruit ne pouvant être totalement blanc (car il aurait alors une énergie totale non finie), le terme $C_{bb}(\tau)$ sera un pic plus ou moins haut et plus ou moins large.

Exercice 1: 5,5

On relève sur une machine le signal vibratoire x(t) (en g) dont l'allure temporelle est représentée en figure 1 :

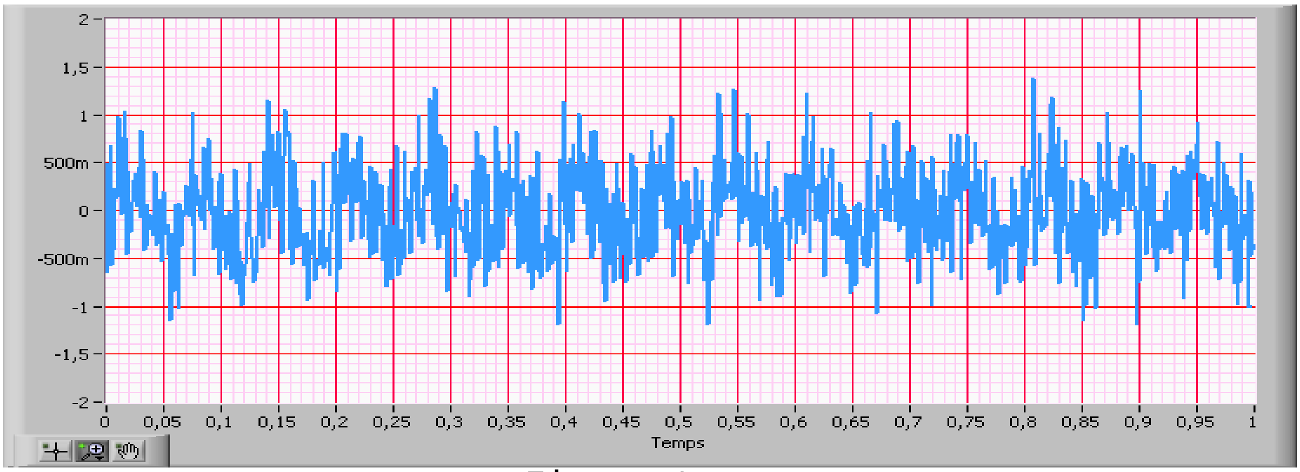


Figure 1

La figure 2 représente une autocorrélation réalisée avec Labview sur 30000 échantillons acquis à une fréquence d'échantillonnage de 1khz :

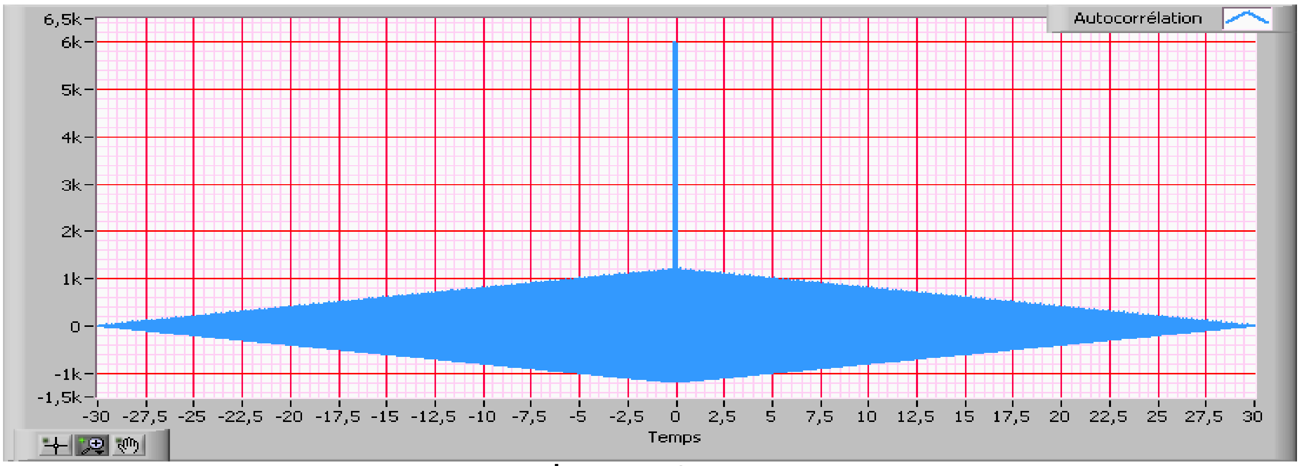


Figure 2

L'autocorrélation calculée par Labview n'a pas subi de correction d'amplitude. Sa valeur en zéro représente donc $\sum_{k=0}^{N-1} x^2(kT_e)$ où N est le nombre de points acquis et T_e est la période d'échantillonnage.

La figure 3 représente un zoom sur la partie centrale de l'autocorrélation :

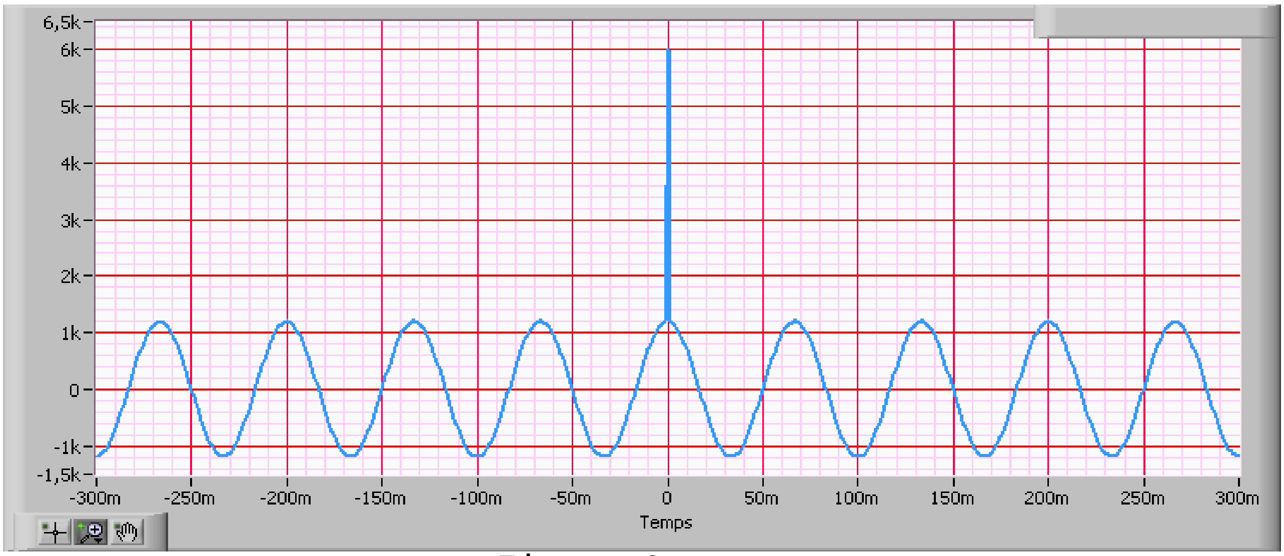


Figure 3

1) Pourquoi, dans la figure 2, la partie (pseudo)périodique de l'autocorrélation est contenue dans une enveloppe triangulaire.

0,5

C'est le calcul de l'autocorrélation discrète effectué par Labview sur un nombre fini N d'échantillons qui est responsable de cette enveloppe triangulaire.
En théorie, l'autocorrélation d'un signal périodique est un signal périodique de même période. Si la fenêtre d'étude était infinie, il n'y aurait pas cette enveloppe triangulaire.

2) En utilisant vos connaissances de cours sur la corrélation, expliquez ce que la figure 3 peut nous apprendre sur le signal. Déterminer qualitativement puis si possible quantitativement le maximum d'information sur le signal (Effectuer les démonstrations nécessaires).

2

Informations qualitatives :

En faisant abstraction de l'enveloppe triangulaire, $C_{xx}(\tau)$ semble contenir :

- Un signal périodique (probablement un cosinus)
- Un important pic en zéro

Le terme périodique de $C_{xx}(\tau)$ nous révèle la présence d'un signal périodique de même période contenant les mêmes composantes spectrales dans le signal x(t).
Le pic en zéro nous suggère la présence, dans x(t), d'un processus aléatoire d'autant plus blanc que le pic sera haut et étroit. La présence de bruit semble confirmée par l'aspect temporel de x(t) (figure 1).
Ces déductions sont possibles en se souvenant que si x(t) est composé de la somme d'un signal périodique $e_T(t)$ de période T avec un bruit blanc b(t), l'autocorrélation se décompose en 4 termes

$$C_{xx}(\tau) = C_{e_Te_T}(\tau) + C_{e_Tb}(\tau) + C_{be_T}(\tau) + C_{bb}(\tau)$$

$C_{e_Te_T}(\tau)$ est une fonction périodique de période T

$C_{e_Tb}(\tau)$ et $C_{be_T}(\tau)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 en moyenne.

$C_{bb}(\tau) = A_0\delta(\tau)$

3

Informations quantitatives :

- L'autocorrélation en zéro permet de calculer :
  - o l'énergie totale du signal. Comme Labview ne calcule que $\sum_{k=0}^{N-1} x^2(kT_e)$, il suffit de multiplier la valeur observée en zéro par la période

d'échantillonnage pour trouver l'énergie totale. Ici on trouve $E = 6000.0,001 = 6\,g^2$.

- o La puissance moyenne du signal (donc également sa valeur efficace). Il suffit de diviser la valeur observée en zéro par le nombre de point acquis. On trouve alors $P_{moy} = \frac{6000}{30000} = 0,2\,g^2$ soit une valeur efficace de $x_{eff} = \sqrt{0,2} \approx 0,45\,g$

- Si le terme périodique est bien un cosinus, alors $e_T(t)$ est une sinusoïde de phase inconnue. L'autocorrélation ne permet pas de retrouver sa phase. Sa fréquence est de 15Hz car on remarque 3 périodes en 200ms. Sa valeur efficace vaut $e_{Teff} = \sqrt{\frac{1200}{30000}} = 0,2\,g$.
- Le bruit semble relativement blanc dans la bande de fréquence étudiée (0 à 500Hz=Fe/2) car le pic en zéro est très étroit. Il aurait fallu un zoom plus précis au voisinage de zéro pour qualifier plus précisément la « blancheur » du bruit. Sa valeur efficace vaut $b_{eff} = \sqrt{\frac{6000-1200}{30000}} = \sqrt{0,16} = 0,4\,g$

Exercice 2: 5,5

Considérons le signal $f(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t) + B\cos(2\pi\nu_1 t)$ avec $\nu_0 = 600\text{Hz}$ et $\nu_1 = 200\text{Hz}$.

On l'échantillonne à la fréquence $\nu_e = \frac{1}{T_e} = 1\text{KHz}$ à l'aide d'un échantillonneur idéal (échantillonnage mathématique). L'échantillonneur n'est pas précédé d'un filtre anti-repliement.

0,5 **1)** La règle de Shannon a-t-elle été respectée ? (justifiez votre réponse)

La règle de shannon implique deux conditions :

- Il faut que le spectre du signal à échantillonner soit à support borné. Dans notre exercice, il existe une limite haute en fréquence. C'est $\nu_0 = 600\text{Hz}$.
- Il faut échantillonner à au moins 2 fois la limite haute en fréquence. Dans notre exercice il faudrait $\nu_e \geq 2\nu_0 = 1200\text{Hz}$.

La règle de Shannon n'a donc pas été respectée

2) Déterminer $f_e(t)$ l'expression du signal $f(t)$ échantillonné dans les conditions de l'énoncé.

0,5

$$f_e(t) = f(t) \cdot Ш_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e)\,\delta(t - nT_e)$$

$$\boxed{f_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e)\,\delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[A\cos(2\pi\nu_0 nT_e) + B\cos(2\pi\nu_1 nT_e)\right]\delta(t - nT_e)}$$

En déduire $F_e(\nu)$, la transformée de Fourier de $f_e(t)$.

$$F_e(\nu) = \nu_e F(\nu) * Ш_{\nu_e}(\nu) = \nu_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\nu) * \delta(\nu - n\nu_e) = \nu_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\nu - n\nu_e)$$

0,5

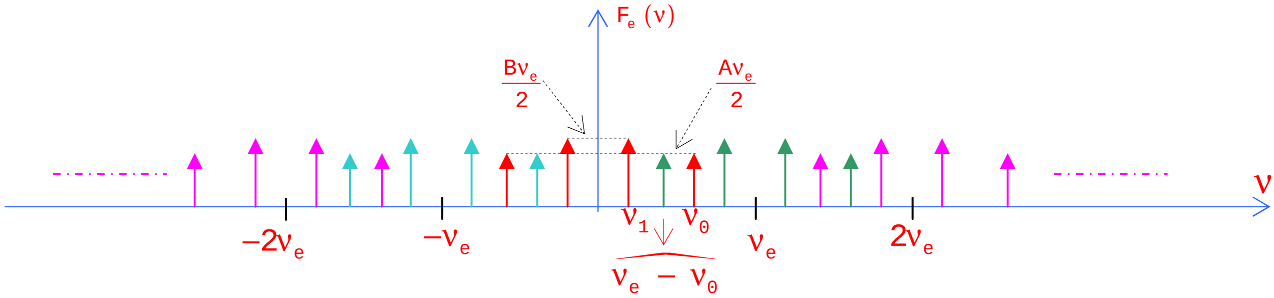
$$F_e(\nu) = \nu_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\nu - n\nu_e) \text{ avec}$$

$$F(\nu) = \frac{A}{2}\left(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\right) + \frac{B}{2}\left(\delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_1)\right)$$

$F_e(\nu)$ est donc composé des 2 paires de dirac périodiquement répétée tous les $n\nu_e$.

Représenter graphiquement $F_e(\nu)$.

0,5



On filtre maintenant le signal échantillonné $f_e(t)$ afin de tenter de reconstituer le signal initial $f(t)$.

3) Si on suppose que ce filtre est idéal, quel devraient être ses caractéristiques ? (type de filtre, fréquences de coupure, amplification dans la bande passante). On donnera la fonction de transfert harmonique de ce filtre.

1,5

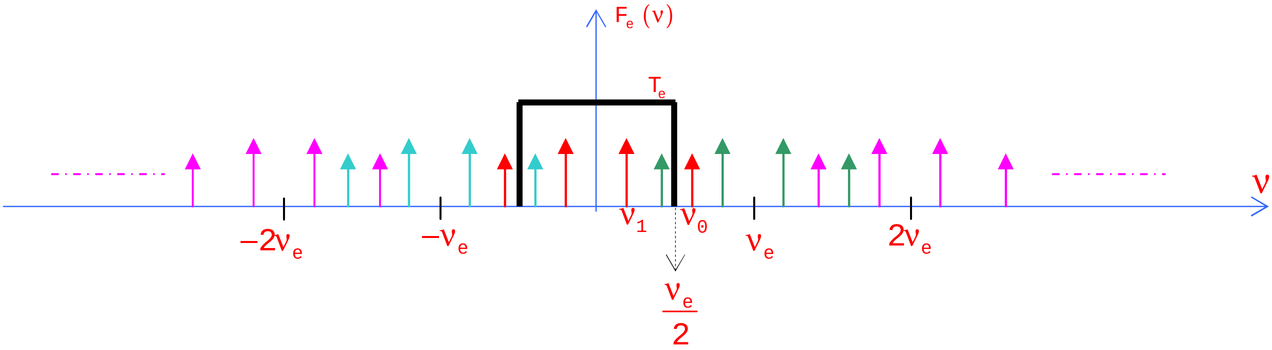
En théorie, si le filtre est parfait, il doit avoir les caractéristiques suivantes :

- Filtre passe-bas.
- Fréquence de coupure $\frac{\nu_e}{2}$.
- Amplification dans la bande passante T_e de façon à compenser le terme ν_e présent dans l'expression de $F_e(\nu)$

Sa fonction de transfert harmonique $H(\nu) = T_e \,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{\nu_e}\right)$

Déterminer $Y(\nu)$ l'expression de la transformée de Fourier du signal y(t) en sortie du filtre idéal. En déduire y(t). Que constatez-vous ?

1



Après filtrage, il ne restera que les termes :

$$Y(\nu) = \frac{A}{2}\left(\delta\left(\nu - (\nu_e - \nu_0)\right) + \delta\left(\nu + (\nu_e - \nu_0)\right)\right) + \frac{B}{2}\left(\delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_1)\right)$$

D'où $\boxed{y(t) = A\cos\left(2\pi(\nu_e - \nu_0)t\right) + B\cos(2\pi\nu_1 t)}$ On remarque que la reconstitution n'est pas exacte.

- Le terme $A\cos(2\pi\nu_0 t)$ n'ayant pas été échantillonné dans les règles de Shannon, n'est pas reconstitué correctement.
- Le terme $B\cos(2\pi\nu_1 t)$ ayant été échantillonné dans les règles de Shannon, est reconstitué correctement.

4) Si on avait placé un filtrage anti repliement avant l'échantillonnage, quelles auraient été les caractéristiques de ce filtre en le supposant idéal ?

En théorie, si le filtre est parfait, il doit avoir les caractéristiques suivantes :

0,5

- Filtre passe-bas.
- Fréquence de coupure $\frac{\nu_e}{2} = 500\text{Hz}$.
- Amplification 1 dans la bande passante.
- Sa fonction de transfert harmonique $H(\nu) = \mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{\nu_e}\right)$

Alors, quel aurait été le signal y(t) reconstitué à la sortie du filtre de la question 3).

0,5

Le filtre anti-repliement a pour effet de supprimer les signaux qui ne peuvent être échantillonnées dans les règles de Shannon. En conséquence, le terme $A\cos(2\pi\nu_0 t)$ aurait été supprimé. Il n'aurait donc pas généré d'expression fausse lors de la reconstitution. On aurait alors eu :

$$\boxed{y(t) = B\cos(2\pi\nu_1 t)}$$

Exercice 3: 2,5

Quelle capacité mémoire minimum faut-il pour stocker une trame d'image vidéo sachant que :

- La bande passante du signal vidéo considéré s'étale de -6MHz à 6MHz.
- On transmet 50 trames par seconde.
- On souhaite coder l'image noir et blanc en 256 niveaux de gris.

(Justifiez votre réponse)

2,5 La fréquence minimale d'échantillonnage est de 12MHz.

Une trame nécessite donc au minimum $\frac{12.10^6}{50}$ échantillons.

Chaque pixel pouvant prendre 256 niveaux de gris, il faudra 8bits par pixel car $2^8 = 256$.

En conséquence, la capacité mémoire minimale est donc : 240000 Octets soit 1,92 Mbits.

Exercice 4: 1,5

Considérons un signal f à énergie totale finie pouvant se mettre sous la forme suivante :

$$f(t) = x(t + t_0) - x(t - t_0)$$

1,5 **1)** Déterminer la fonction d'autocorrélation de f(t) en fonction de celle de x(t).

$C_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f^*(t - \tau)\, dt$ lorsque l'on développe, il apparaît 4 termes :

$$C_{ff}(\tau) = C_1(\tau) + C_2(\tau) + C_3(\tau) + C_4(\tau)$$

$$C_1(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + t_0)\, x^*(t - \tau + t_0)\, dt$$

$$C_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} -x(t + t_0)\, x^*(t - \tau - t_0)\, dt$$

$$C_3(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} -x(t - t_0)\, x^*(t - \tau + t_0)\, dt$$

$$C_4(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)\, x^*(t - \tau - t_0)\, dt$$

On constate que :

$$C_1(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + t_0)\, x^*(t + t_0 - \tau)\, dt = C_{xx}(\tau)$$

$$C_4(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)\, x^*(t - t_0 - \tau)\, dt = C_{xx}(\tau)$$

$$C_2(\tau) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t + t_0)\, x^*(t + t_0 - \tau - 2t_0)\, dt = -C_{xx}(\tau + 2t_0)$$

$$C_3(\tau) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)\, x^*(t - t_0 - \tau + 2t_0)\, dt = -C_{xx}(\tau - 2t_0)$$

D'où $\boxed{C_{ff}(\tau) = 2C_{xx}(\tau) - C_{xx}(\tau - 2t_0) - C_{xx}(\tau + 2t_0)}$

FORMULAIRE

Convolution :

$$f*g : \quad t \rightarrow (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\,g(t-a)\,da$$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T :

$$E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \underset{T\to+\infty}{Lim} \frac{1}{T}\int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance :

$$P = E(x_i^{\,2}) = \underset{T\to+\infty}{Lim} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$$

Rapport signal/bruit de quantification :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{S}{B}\right)_{max\,dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\, dt$$

Transformation de Fourier (TF):

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$$

Quelques propriétés de la TF :

$$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

$$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$$

$$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$$

$$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$$

$$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$$

$$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$$

$$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$$

$$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\, F(\nu)$$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques :

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$\mathrm{ech}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

$$\text{DSP : } S_{ff}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$$

pour les fonctions périodiques

$$S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

$$\text{DSPI : } S_{fg}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot x^*(t-\tau)\,dt$$

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot x^*(t-\tau)\,dt$$

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot x^*(t-\tau)\,dt$$

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot x^*(t-\tau)dt$$

et $$C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t-\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot y^*(t-\tau)dt$$

Propriétés :

Si $y(t) = x(t-\alpha)$ avec α réel, alors :

$$C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau)$$

Si $y(t) = x(\alpha t)$ avec α réel, alors :

$$C_{yy}(\tau) = \frac{1}{|\alpha|} C_{xx}(\alpha\tau)$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

Dirac $$\begin{cases} \forall t \neq 0 \quad \delta(t) = 0 \\ \delta(0) = +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$$