NOM :	TRAITEMENT DU SIGNAL	Note : /20,5
Durée : 1H40. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

Questions de Cours : 2,5

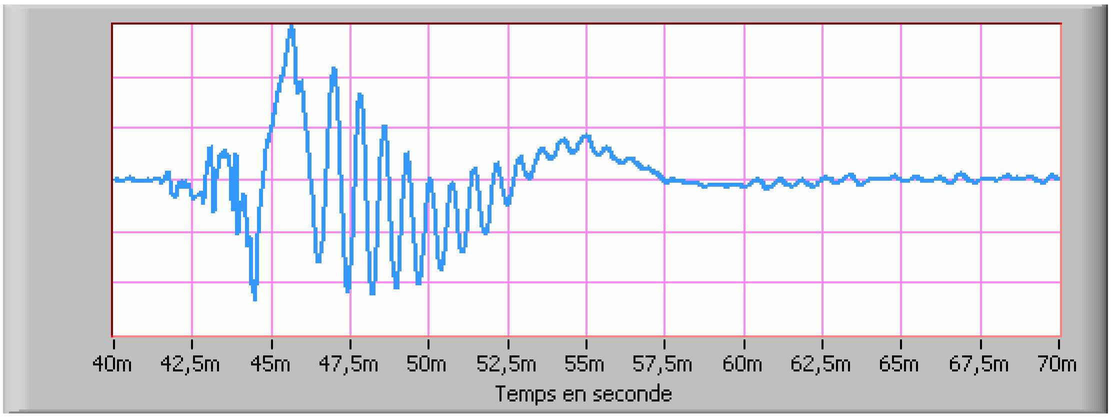
0,5 **1)** Quelle propriété mathématique doit avoir la fonction de transfert d'un filtre qui ne déphase pas.

1 En déduire la propriété mathématique nécessaire et suffisante que doit avoir la réponse impulsionnelle d'un tel filtre.

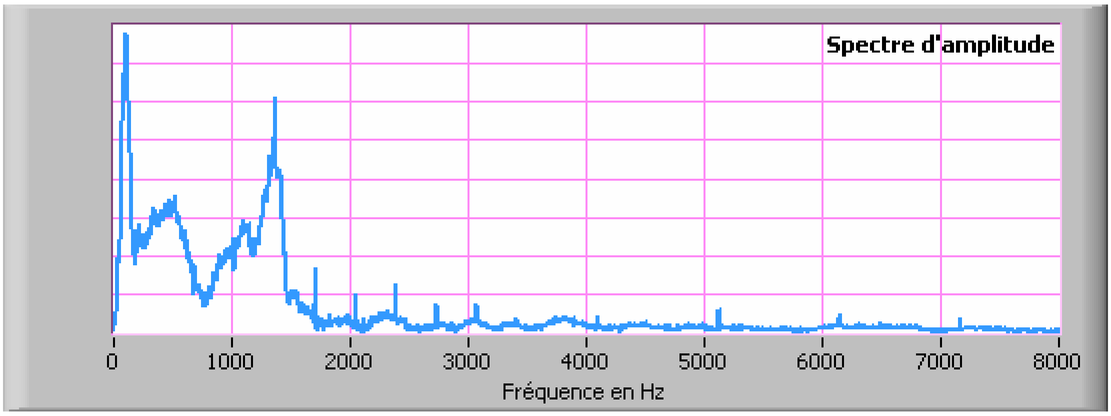
1 Peut-on réaliser de tels filtres ? (Justifiez et expliquez)

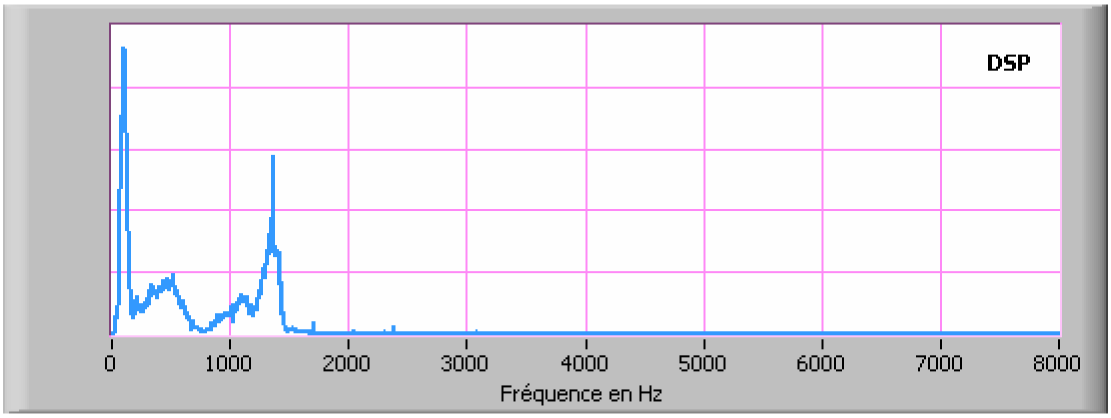
Exercice 1: 4,5

Sur une machine, on relève le signal transitoire suivant à l'aide d'un oscilloscope analogique :



Un analyseur de spectre analogique nous donne son spectre d'amplitude et sa densité spectrale de puissance (DSP) :





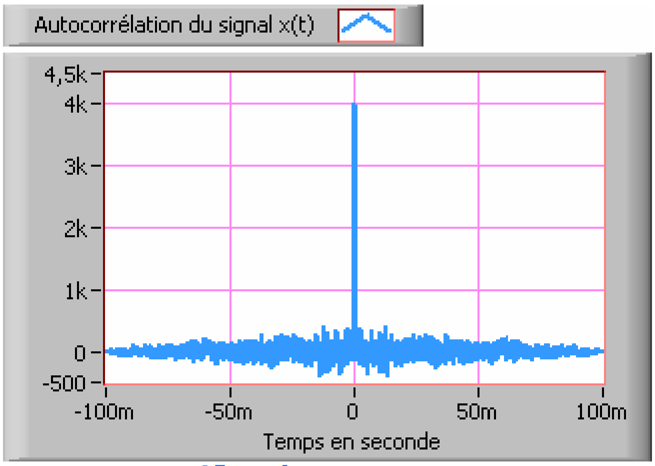
On désire échantillonner ce signal.

3 **1)** En tenant compte des particularités de ce signal, proposer 3 méthodes qui permettent de déterminer les paramètres d'échantillonnage. Expliquer ces 3 méthodes sans effectuer les calculs.

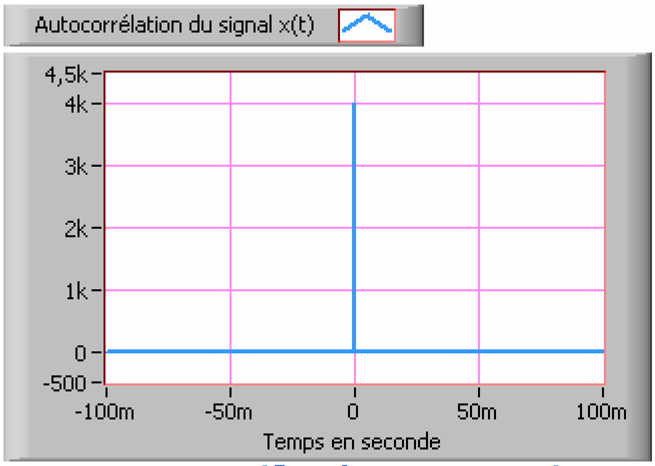
1,5 **2)** Développer la méthode de votre choix pour déterminer les paramètres d'échantillonnage. (expliquez vos choix)

Exercice 2: 5,5

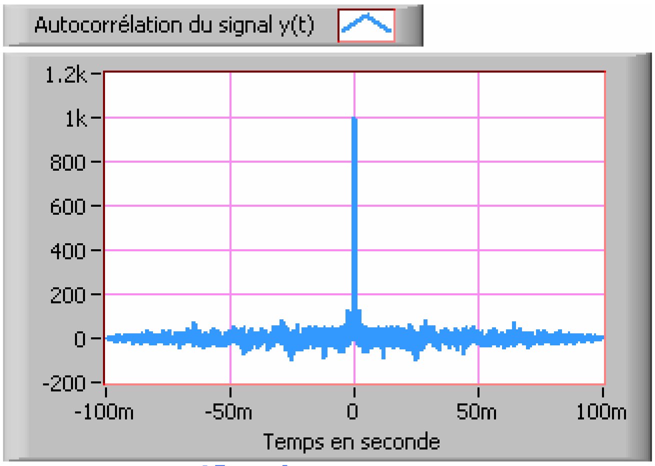
Considérons les signaux réels x(t) et y(t) échantillonnés à 10kHz. x et y représentent des volts et t un temps en seconde. Avec Labview, on a réalisé leur autocorrélation respective sur 1000 échantillons.



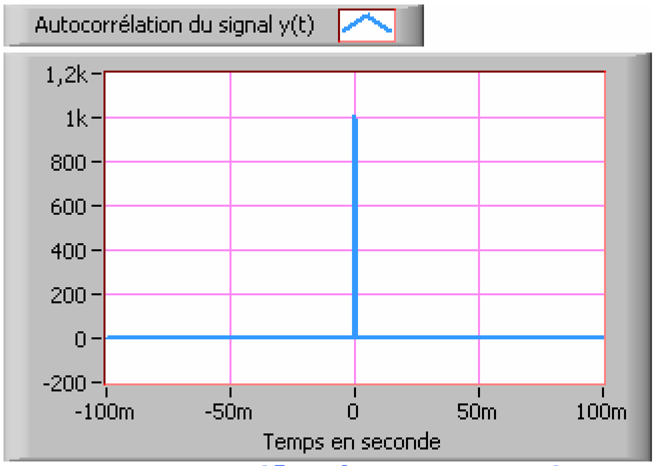
Autocorrélation sur une mesure



Autocorrélation moyennée



Autocorrélation sur une mesure



Autocorrélation moyennée

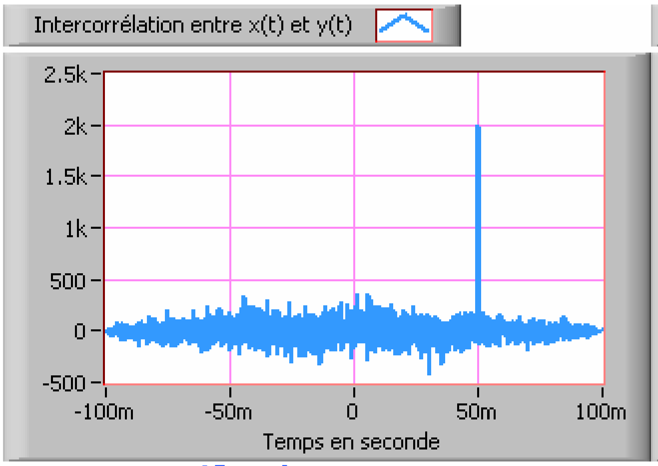
L'autocorrélation calculée par Labview n'a pas subi de correction d'amplitude. Sa valeur en zéro représente donc $\sum_{k=0}^{N-1} x^2(kT_e)$ où N est le nombre de points acquis et T_e est la période d'échantillonnage.

1) En utilisant vos connaissances de cours sur la corrélation, expliquez ce que ces autocorrélations peuvent nous apprendre sur les signaux x(t) et y(t). Déterminer qualitativement puis si possible quantitativement le maximum d'information sur ces signaux.

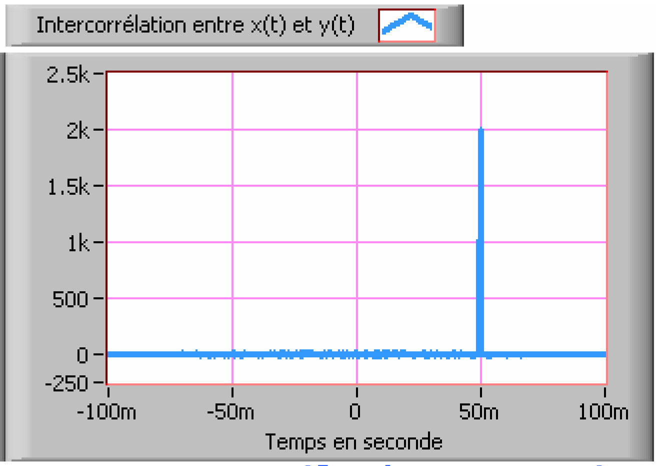
1 **Informations qualitatives :**

3 **Informations quantitatives :**

On a réalisé ensuite une intercorrélation entre x(t) et y(t) ($C_{xy}(\tau)$) sur 1000 échantillons.

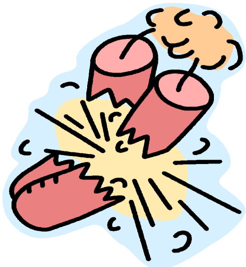


Intercorrélation sur une mesure



Intercorrélation moyennée

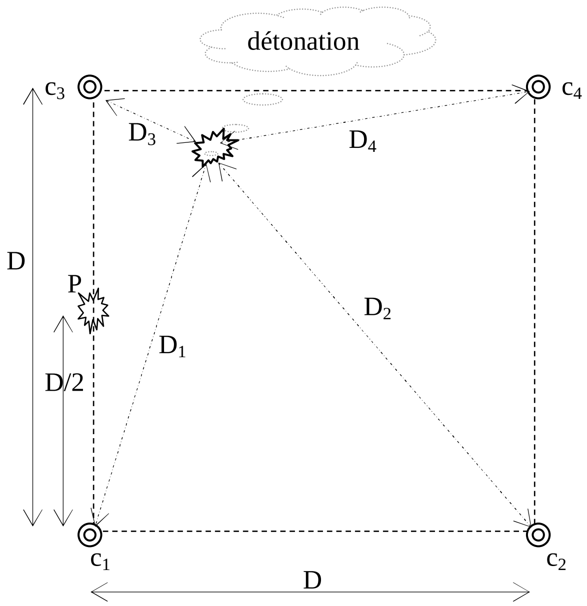
1,5 **2)** Que peut-on déduire de ces intercorrélations ?



Exercice 3: 8

Bang !!! Une détonation retentit quelque part sur un immense terrain militaire. D'où vient exactement cette explosion ?

Pour trouver sa position, les militaires ont placé préalablement 4 capteurs (microphones c_1, c_2, c_3 et c_4) disposés aux 4 coins de leur terrain carré. Pour simplifier l'étude, on négligera, évidemment, la vitesse du vent, l'age du capitaine, les échos, etc.. On supposera également que le terrain est plat et qu'il n'y a pas d'obstacle.
La célérité du son dans le bon air de la campagne vaut C.



Pour simplifier encore (décidément !!!), on considérera que le son (e(t)) émis par l'explosion est une impulsion rectangulaire de hauteur A et de largeur T_0.

2 **1)** Déterminez, par la méthode de votre choix, l'autocorrélation $C_{ee}(\tau)$ du signal e(t).

2) En supposant que le son de l'explosion arrive aux capteurs c_1, c_2, c_3 et c_4 simplement atténué (coefficient α_i) et retardé, déterminez les expressions de $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ et $c_4(t)$ en fonction de e(t), D_1, D_2, D_3 et D_4.

1,5

3) Déterminez en fonction de $C_{ee}(\tau)$ les intercorrélations suivantes : $C_{c_1c_2}(\tau)$, $C_{c_1c_3}(\tau)$ et $C_{c_1c_4}(\tau)$

3

Déterminer la valeur de ces 3 intercorrélations dans le cas où la détonation à lieu au point P (entre les capteurs c_1 et c_3)

1,5

FORMULAIRE

Convolution :

$$f*g: \quad t \rightarrow (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T :

$$E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \underset{T\to+\infty}{\mathrm{Lim}} \frac{1}{T}\int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance :

$$P = E(x_i^{\,2}) = \underset{T\to+\infty}{\mathrm{Lim}} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$$

Rapport signal/bruit de quantification :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{S}{B}\right)_{max\ dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right) dt$ et

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right) dt$$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi n t}{T}}$ avec

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi n t}{T}} dt \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\, dt$$

Transformation de Fourier (TF):

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$$

Quelques propriétés de la TF :

$$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

$$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$$

$$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$$

$$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$$

$$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$$

$$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$$

$$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$$

$$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\, F(\nu)$$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques :

$$\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$$

Autres propriétés :

f(t)	F(ν)
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$\mathrm{ech}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \ge 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques

$$S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}F_T(\nu)G_T^*(\nu)d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot x^*(t-\tau)\,dt$$

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot x^*(t-\tau)\,dt$$

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot x^*(t-\tau)\,dt$$

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot x^*(t-\tau)dt$$

et $$C_{xy}(\tau) = E\left[x(t)y^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot y^*(t-\tau)dt$$

Propriétés :

Si $y(t) = x(t-\alpha)$ avec α réel, alors :

$C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau)$

Si $y(t) = x(\alpha t)$ avec α réel, alors :

$$C_{yy}(\tau) = \frac{1}{|\alpha|}C_{xx}(\alpha\tau)$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Dirac $$\begin{cases} \forall t \neq 0 \quad \delta(t) = 0 \\ \delta(0) = +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1 \end{cases}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$$