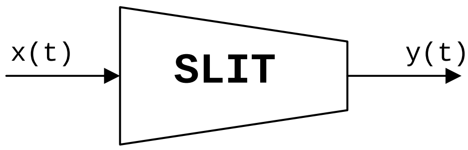
NOM :	Correction **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /21

Durée : 1H40. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

Exercice 1: 5

Considérons un Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT) de réponse impulsionnelle h(t) et de fonction de transfert $H(\nu)$.



1,5 **1)** Si y(t) est la réponse du SLIT à l'excitation x(t), calculez $C_{yy}(\tau)$ en fonction de $C_{xx}(\tau)$ et de h(t) (on s'aidera avantageusement du théorème de Wiener-Khintchine).

$C_{yy}(\tau)$ est la transformée inverse de Fourier de $S_{YY}(\nu)$.

Or $S_{YY}(\nu) = S_{XX}(\nu)\left|H(\nu)\right|^2$ ou encore $S_{YY}(\nu) = S_{XX}(\nu)\,H(\nu)\,H^*(\nu)$

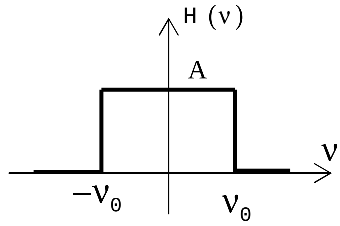
D'où $\boxed{C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau) * F^{-1}\left(\left|H(\nu)\right|^2\right)}$

ou encore $\boxed{C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)}$

1,5 **2)** Si x(t) est un bruit blanc de DSP a_0, calculez $C_{yy}(\tau)$.

Comme x(t) est un bruit blanc de DSP a_0, $C_{xx}(\tau) = a_0\,\delta(\tau)$ et donc $C_{yy}(\tau) = a_0\,\delta(\tau) * F^{-1}\left(\left|H(\nu)\right|^2\right)$ puis $\boxed{C_{yy}(\tau) = a_0\,F^{-1}\left(\left|H(\nu)\right|^2\right)}$

On considère maintenant que le SLIT est un filtre passe-bas idéal de bande passante comprise entre $-\nu_0$ et $+\nu_0$ et d'amplification A dans la bande passante.



1 **3)** Reprendre la question 1).

$$H(\nu) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right) \text{ d'où } |H(\nu)|^2 = A^2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right) \text{ et donc}$$

$$C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau) * F^{-1}\left(|H(\nu)|^2\right)$$

$$\boxed{C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau) * \left(A^2\, 2\nu_0\, \mathrm{sinc}\,(2\nu_0\tau)\right)}$$

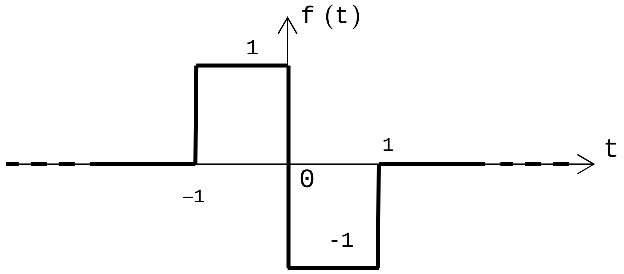
1 **4)** Reprendre la question 2).

$$C_{yy}(\tau) = a_0\,\delta(\tau) * \left(A^2\, 2\nu_0\, \mathrm{sinc}\,(2\nu_0\tau)\right)$$

$$\boxed{C_{yy}(\tau) = a_0\, A^2\, 2\nu_0\, \mathrm{sinc}\,(2\nu_0\tau)}$$

Exercice 2: 5

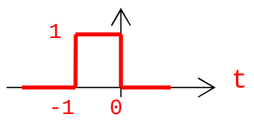
Considérons la fonction f(t) suivante :



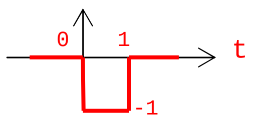
1 **1)** Exprimez f(t) à l'aide des fonctions usuelles.

La fonction f peut être considérée comme la somme des deux fonctions f_1 et f_2 suivantes :

$f_1(t) = \mathrm{rect}\,(t + 0,5)$



$f_2(t) = -\mathrm{rect}\,(t - 0,5)$



D'où $\boxed{f(t) = \mathrm{rect}\,(t + 0,5) - \mathrm{rect}\,(t - 0,5)}$

1 **2)** Déterminez $F(\nu)$, la transformée de Fourier de f(t).

$$\mathrm{rect}\,(t + 0,5) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}\,(\nu)\,.\,e^{j2\pi\nu 0,5}$$

$$-\mathrm{rect}\,(t - 0,5) \xrightarrow{\text{Fourier}} -\mathrm{sinc}\,(\nu)\,.\,e^{-j2\pi\nu 0,5}$$

d'où $\boxed{F(\nu) = \mathrm{sinc}\,(\nu)\,.\,e^{j\pi\nu} - \mathrm{sinc}\,(\nu)\,.\,e^{-j\pi\nu}}$

3) En utilisant les propriétés des fonctions d'autocorrélation et en vous aidant de la question 2, déterminez $C_{ff}(\tau)$, la fonction d'autocorrélation de f.

Pour calculer l'autocorrélation de f, on peut faire le calcul
2 direct en faisant apparaître les fonctions f_1 et f_2.
L'énoncé suggère cependant d'utiliser la transformée de Fourier de f. On peut alors exploiter avantageusement le théorème de Wiener Khintchine : $C_{ff}(\tau) \rightarrow S_{ff}(\nu) = F(\nu)F^*(\nu)$

$$F(\nu) = \text{sinc}(\nu).e^{j\pi\nu} - \text{sinc}(\nu).e^{-j\pi\nu}$$

$$F^*(\nu) = \text{sinc}(\nu).e^{-j\pi\nu} - \text{sinc}(\nu).e^{j\pi\nu} \qquad \text{d'où}$$

$$S_{ff}(\nu) = \left(\text{sinc}(\nu).e^{j\pi\nu} - \text{sinc}(\nu).e^{-j\pi\nu}\right)\left(\text{sinc}(\nu).e^{-j\pi\nu} - \text{sinc}(\nu).e^{j\pi\nu}\right)$$

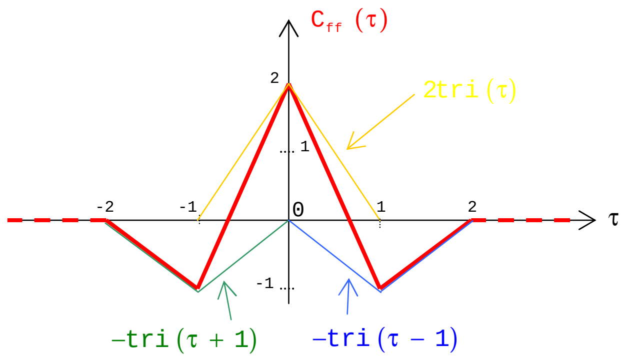
$$S_{ff}(\nu) = 2\text{sinc}^2(\nu) - \text{sinc}^2(\nu)e^{j2\pi\nu} - \text{sinc}^2(\nu)e^{-j2\pi\nu}$$

On en déduit l'autocorrélation par transformée inverse :

$$\boxed{C_{ff}(\tau) = 2\text{tri}(\tau) - \text{tri}(\tau+1) - \text{tri}(\tau-1)}$$

Représentez graphiquement $C_{ff}(\tau)$

1



Exercice 3: 7

On relève, sur une machine tournante, un signal vibratoire x(t) (exprimé en g)
On utilise Labview pour déterminer l'autocorrélation de x(t).
Les figures 2 et 3 représentent les autocorrélations de x(t) obtenues après les corrections d'abscisse et d'amplitude effectuées sur l'autocorrélation brute fournie par le VI Express de LabView.
La figure 1 représente une partie du diagramme Labview montrant les différentes corrections.

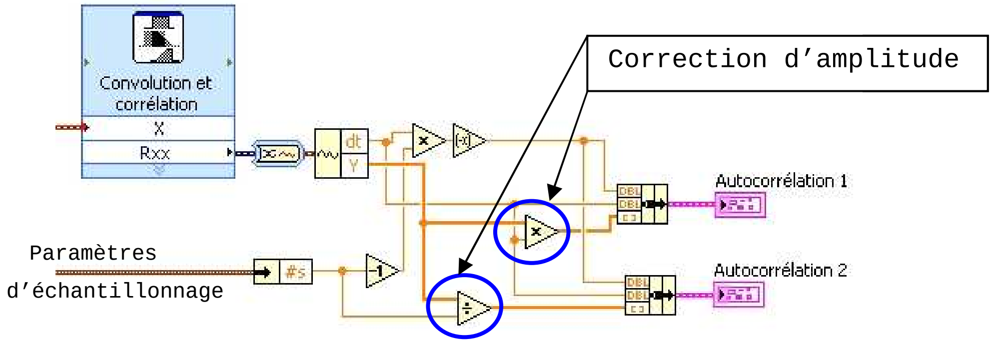


Figure 1

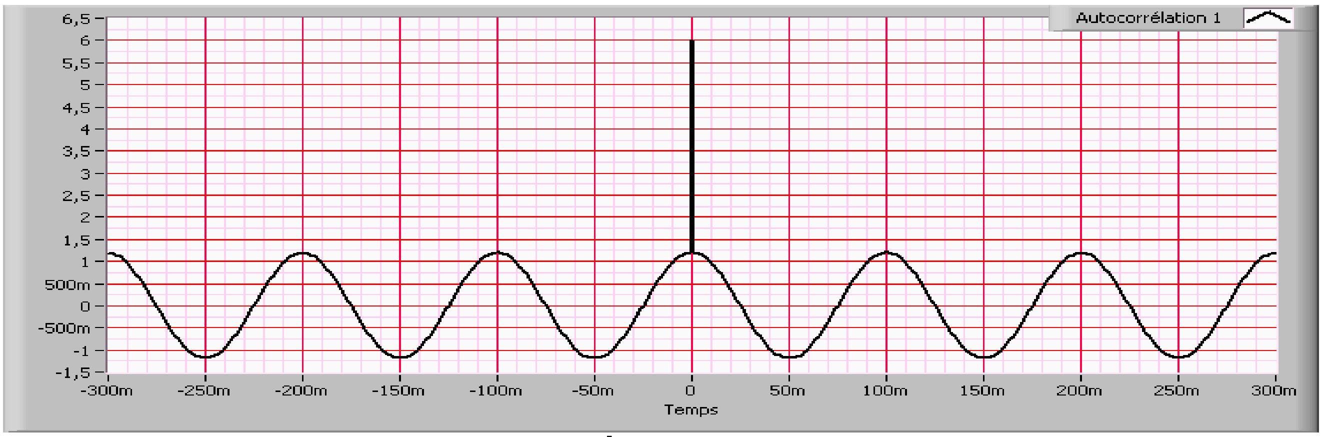


Figure 2

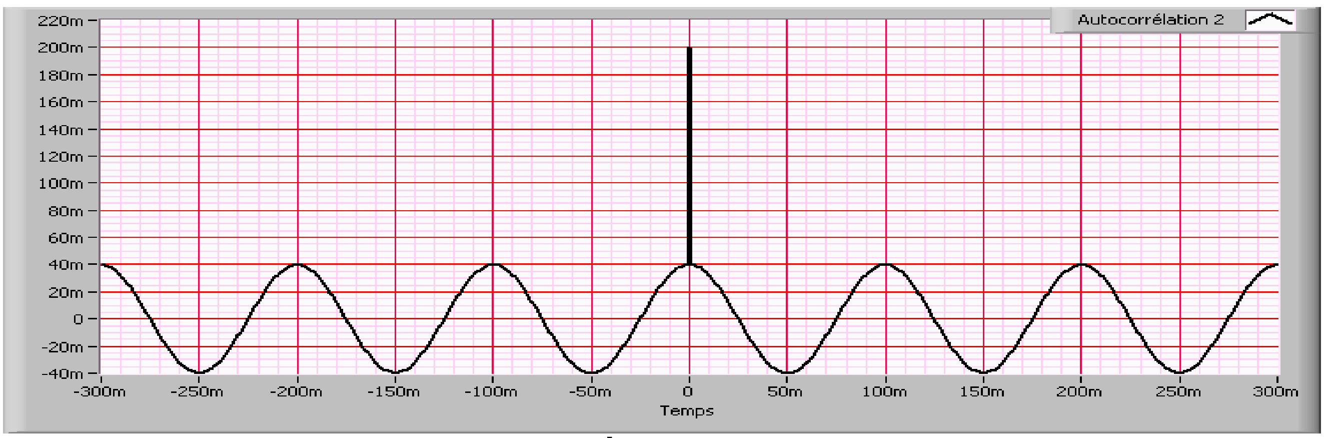


Figure 3

2 **1)** En étudiant la figure 1, expliquez ce que réalisent les deux corrections d'amplitude permettant d'obtenir :

La figure 2 (autocorrélation 1) :
La multiplication par la période d'échantillonnage (dt) permet d'obtenir une autocorrélation homogène à une énergie totale d'interaction entre le signal et sa version décalée de τ. Ainsi, sa valeur en 0 représentera l'énergie totale du signal (soit $6g^2s$).
Pour plus de détails, voir TP6.

La figure 3 (autocorrélation 2) :
La division par le nombre total de points acquis (#S) permet d'obtenir une autocorrélation homogène à une puissance moyenne d'interaction entre le signal et sa version décalée de τ. Ainsi, sa valeur en 0 représentera la puissance moyenne du signal (soit $0,2g^2$).
Pour plus de détails, voir TP6.

On remarque que l'autocorrélation est composée d'un cosinus sur lequel s'ajoute un pic en 0.

2 **2)** Que signifie la présence de ces deux éléments ? Expliquez et justifiez mathématiquement de façon qualitative.
Le terme périodique de $C_{xx}(\tau)$ nous révèle la présence d'un signal périodique de même période contenant les mêmes composantes spectrales dans le signal x(t).
Le pic en zéro nous suggère la présence, dans x(t), d'un processus aléatoire d'autant plus blanc que le pic sera haut et étroit.
Ces déductions sont possibles en se souvenant que si x(t) est composé de la somme d'un signal périodique $e_T(t)$ de période T avec un bruit blanc b(t), l'autocorrélation se décompose en 4 termes $C_{xx}(\tau) = C_{e_Te_T}(\tau) + C_{e_Tb}(\tau) + C_{be_T}(\tau) + C_{bb}(\tau)$

$C_{e_Te_T}(\tau)$ est une fonction périodique de période T

$C_{e_Tb}(\tau)$ et $C_{be_T}(\tau)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 en moyenne.

$C_{bb}(\tau) = A_0\delta(\tau)$

3 **3)** Exploitez quantitativement les figures 2 et 3 afin d'obtenir le maximum d'information sur x(t) (valeurs efficaces et énergies de chacune de ses composantes, durée de la fenêtre d'acquisition, …).

La figure 2 (autocorrélation 1) :
En 0, elle nous révèle l'énergie totale du signal x(t) : $E_{totale} = 6\ g^2 s$.
On peut également déduire l'énergie totale du processus aléatoire (bruit) ainsi que celle du terme périodique.

$$E_{totale\ du\ bruit} = 6 - 1,2 = 4,8\ g^2 s$$

$$E_{totale\ du\ terme périodique} = 1,2\ g^2 s$$

On apprend également que le signal périodique (certainement sinusoïdal) a une période de 100ms soit une fréquence de 10Hz.

La figure 3 (autocorrélation 2) :
En 0, elle nous révèle la puissance moyenne du signal :
$P_{moyenne\ signal} = 0,2\ g^2$ donc une valeur efficace de $Val\_efficace_{signal} = \sqrt{P_{moyenne\ signal}} \approx 0,45\ g_{eff}$
On peut également déduire la puissance moyenne (puis la valeur efficace) du processus aléatoire (bruit) ainsi que celle du terme périodique.

$$P_{moyenne\ bruit} = 0,2 - 0,04 = 0,16\ g^2$$

$$Val\_efficace_{bruit} = \sqrt{P_{moyenne\ bruit}} = 0,4\ g_{eff}$$

$$P_{moyenne\ Spériodique} = 0,04\ g^2$$

$$Val\_efficace_{Spériodique} = \sqrt{P_{moyenne\ Spériodique}} = 0,2\ g_{eff}$$

A partir des deux résultats précédents, on peut en déduire la durée T de la fenêtre d'acquisition. En effet, $E_{totale} = P_{moyenne\ signal} \cdot T$ d'où $T = \dfrac{E_{totale}}{P_{moyenne\ signal}} = 30s$

Exercice 4: 4

Considérons le signal transitoire f(t) obtenu à l'oscilloscope analogique (figure 1).

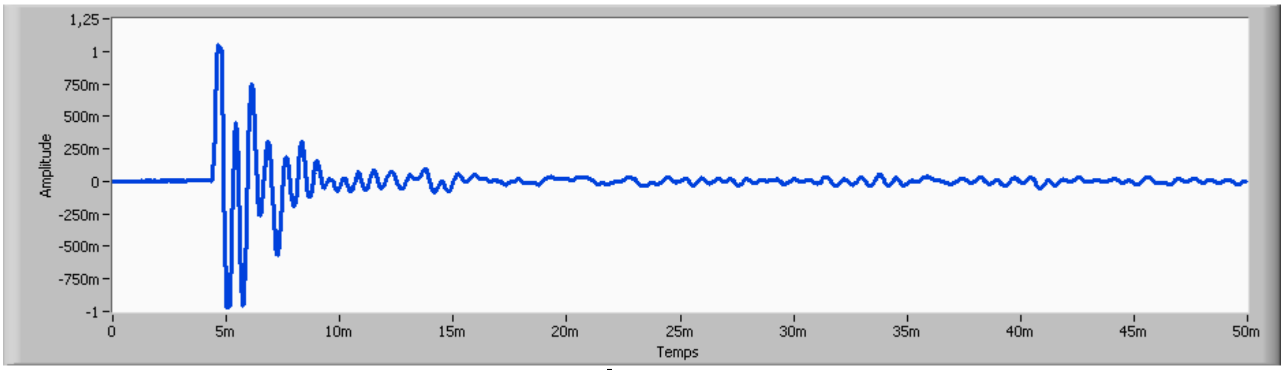


Figure 1

Un analyseur de spectre analogique nous révèle sa densité spectrale de puissance (figure 2)

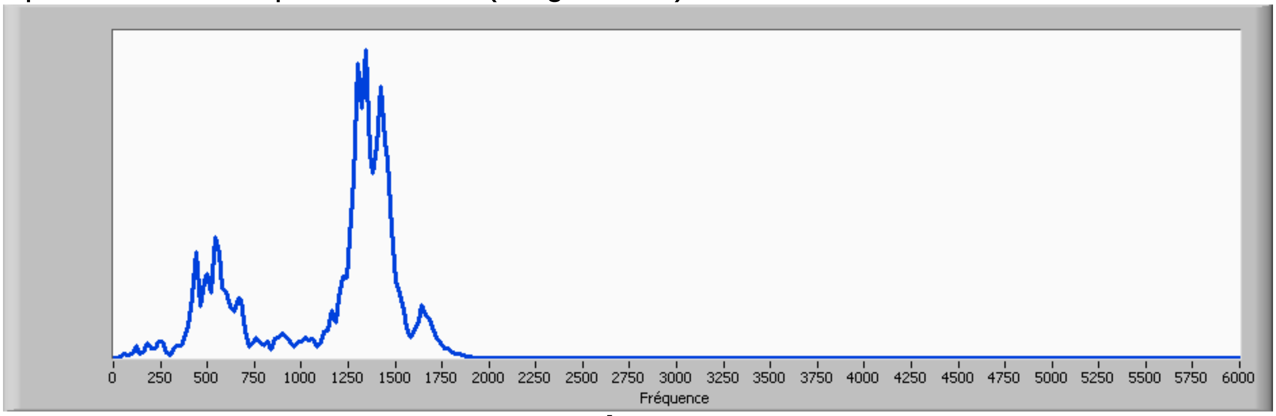


Figure 2

On souhaite acquérir numériquement ce signal f(t).

2,5 **1)** Proposez deux méthodes qui permettent de déterminer les paramètres d'échantillonnage. Expliquez ces deux méthodes sans effectuer les calculs.

Les paramètres d'échantillonnage à déterminer sont la fréquence d'échantillonnage et le filtrage anti repliement.

La fréquence d'échantillonnage F_e se détermine en respectant les règles de Shannon.
Pour déterminer F_e, il est donc nécessaire de connaître la limite fréquentielle utile du spectre du signal.
En général nous avons deux approches classiques différentes :

1. Réaliser un modèle mathématique simplifié du signal afin de déterminer par un calcul approché son spectre. En déduire la bande de fréquence utile sur des critères principalement énergétiques. Limiter le spectre réel au spectre utile par filtrage anti repliement. Puis appliquer les règles de Shannon sur cette limite fréquentielle supérieure.
2. Mesurer, si cela est possible, le spectre du signal puis en déduire la bande de fréquence utile sur des critères principalement énergétiques. Limiter le spectre réel au spectre utile par filtrage anti repliement. Puis appliquer les règles de Shannon sur cette limite fréquentielle supérieure.

1,5 **2)** Développez la méthode de votre choix pour déterminer les paramètres d'échantillonnage.

Comme l'énoncé nous donne la densité spectrale de puissance du signal, nous appliquerons la deuxième méthode décrite précédemment.
La bande de fréquence utile semble se terminer vers 2000Hz. Nous placerons donc un filtre anti repliement passe-bas dont la bande passante se termine à 2000Hz. Nous choisirons ensuite la fréquence d'échantillonnage. Elle doit être supérieure à 2 fois la fréquence à laquelle le filtre a une atténuation jugée suffisante pour réjecter les fréquences indésirables. Si le filtre était idéal (cas d'école), sa fréquence de coupure serait de 2000Hz et $F_e \geq 4000$Hz.