NOM :	**Correction** **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /21,5

Durée : 1H40. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

Exercice 1: 4

Considérons les images suivantes (les origines des repères sont au centre des images) :

Image n°1

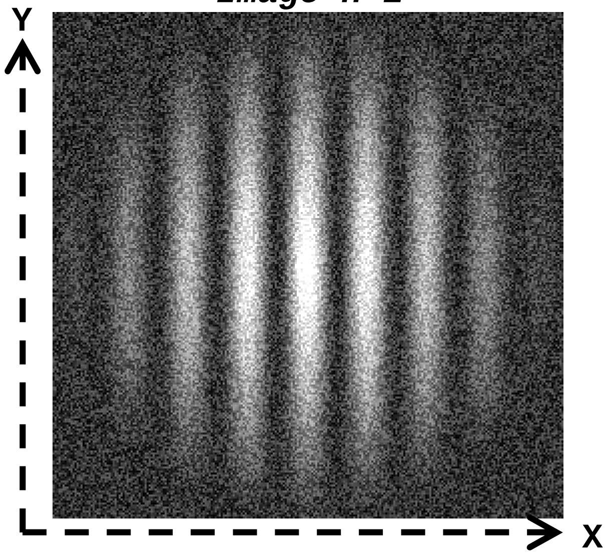


Image n°2

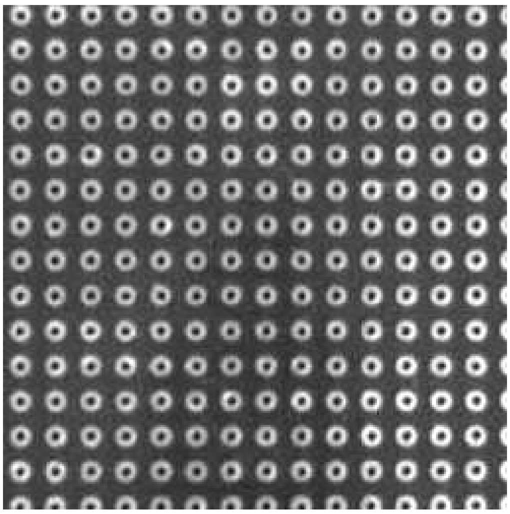


Image n°3

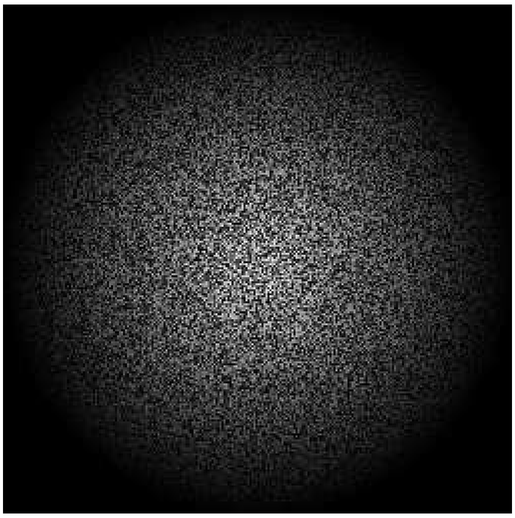
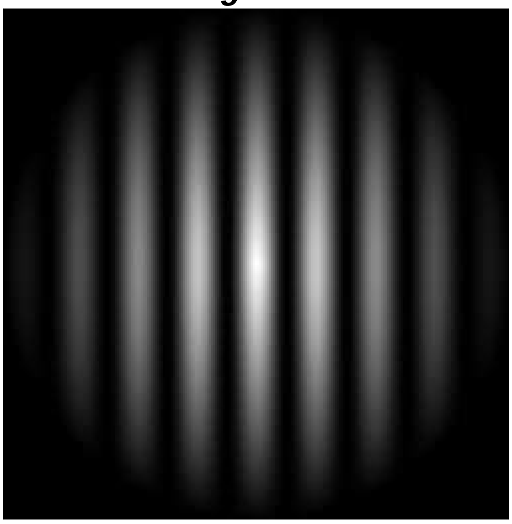


Image n°4



Les images 5, 6, 7 et 8 représentent en 3D les autocorrélations des images précédentes. Elles ont, malheureusement, été mélangées.

Image n°5

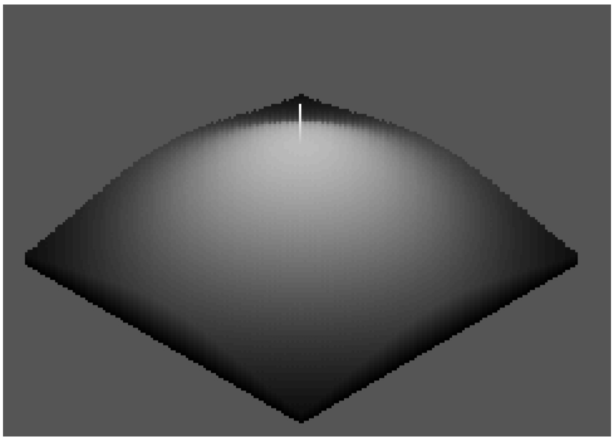


Image n°6

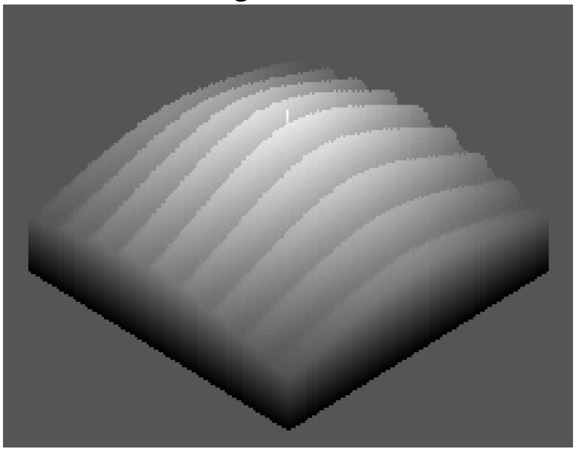


Image n°7

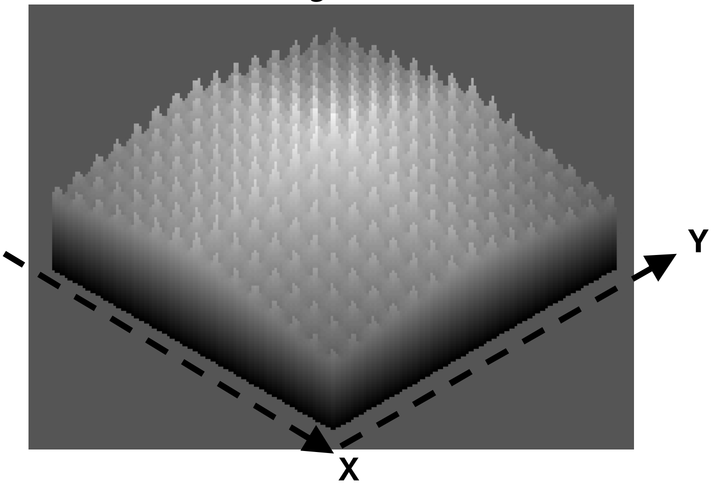
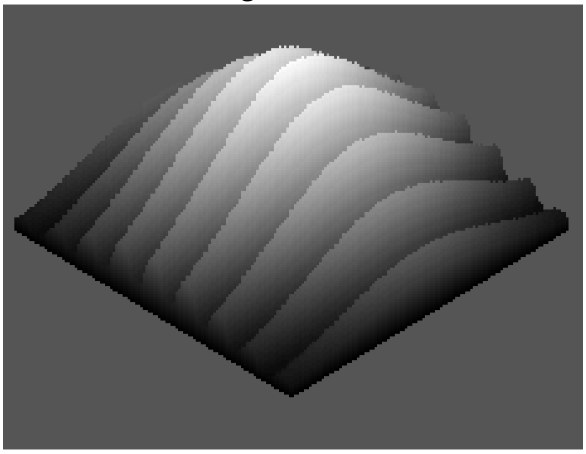


Image n°8



4 **1)** Pour chaque image, retrouvez son autocorrélation.
Justifiez vos réponses.

L’autocorrélation de l’image n°1 est l’image n° 6
Justification :
L'image possède une périodicité selon l'axe X. L'autocorrélation aura nécessairement également cette périodicité selon le même axe (car l'autocorrélation d'un signal périodique est un signal périodique de même période...etc (voir cours)).
L'image est aussi bruitée par un signal qui semble aléatoire. L'autocorrélation présentera donc un pic en 0 en plus de la périodicité.
L'image 6 est la seule qui possède les propriétés requises.

L’autocorrélation de l’image n°2 est l’image n° 7
Justification :
L'image possède un motif répété périodiquement selon X et Y.
L'autocorrélation aura également cette propriété.
L'image 7 est la seule qui possède les propriétés requises.

L’autocorrélation de l’image n°3 est l’image n° 5
Justification :
L'image est celle d'un bruit observé au travers d'une fenêtre conique. Son autocorrélation doit posséder un pic en zéro et n'avoir aucune périodicité.
L'image 5 est la seule qui possède les propriétés requises.

L’autocorrélation de l’image n°4 est l’image n° 8
Justification :
L'image possède une périodicité selon l'axe X seulement. L'autocorrélation aura nécessairement également cette périodicité selon le même axe. L'absence de bruit élimine les images 5 et 6.
L'image 8 est la seule qui possède les propriétés requises.

Exercice 2: 5

Considérons les images suivantes codées sur 8 bits (c'est-à-dire 256 niveaux de gris) :

Image n°1

Image n°2

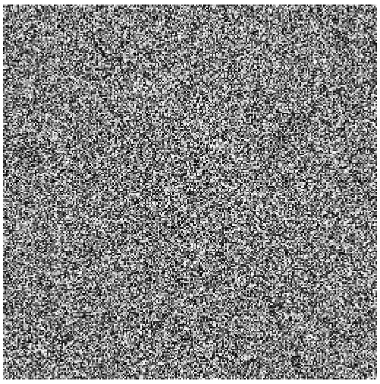


Image n°3

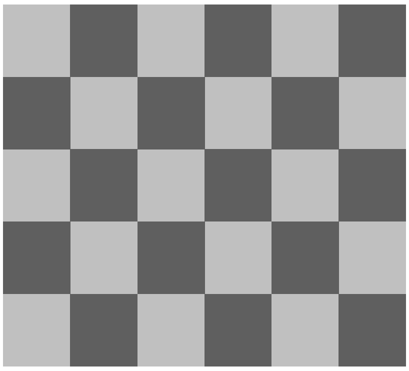


Image n°4

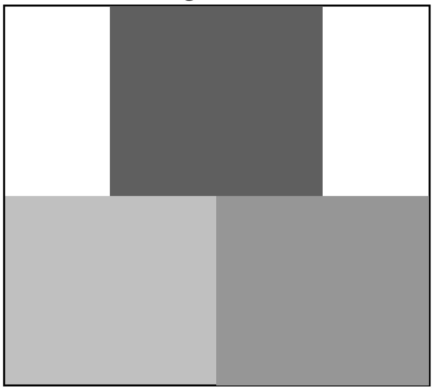
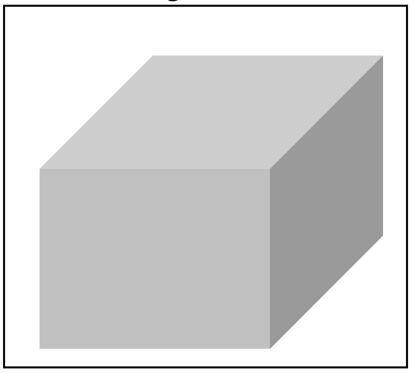


Image n°5



Les images 6, 7, 8, 9 et 10 représentent les histogrammes des niveaux de gris des images précédentes. Elles ont, malheureusement, été mélangées.

Image n°6

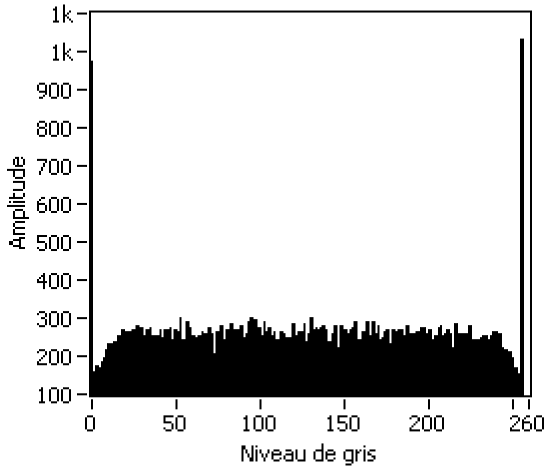


Image n°7

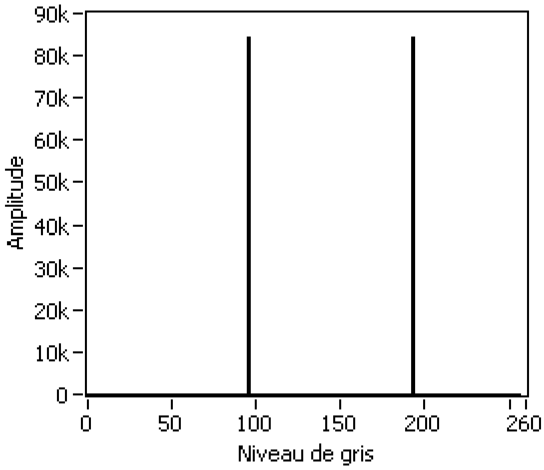


Image n°8

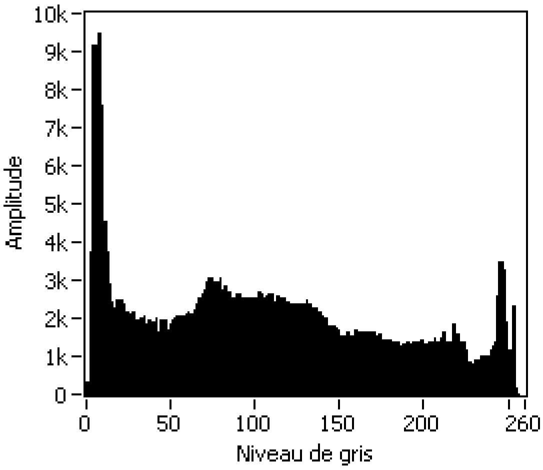


Image n°9

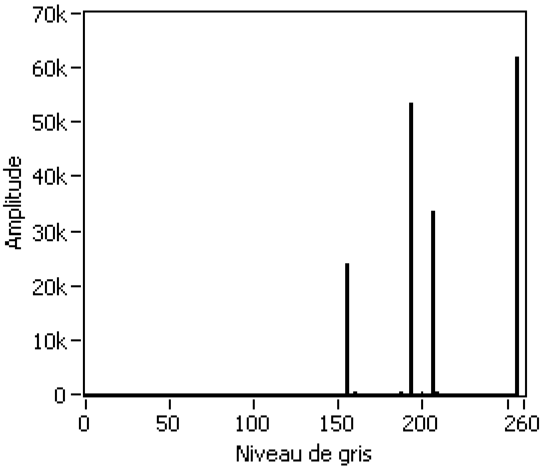
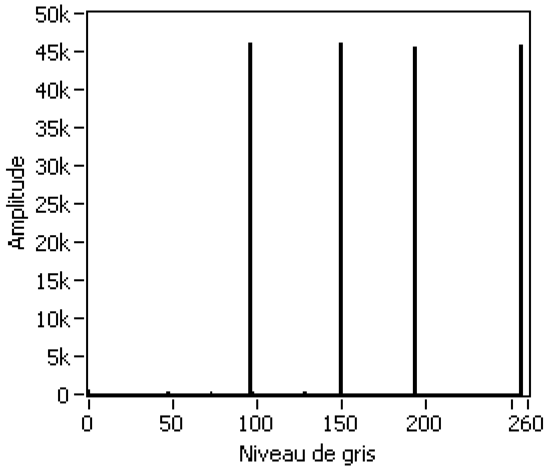


Image n°10



5 **1)** Pour chaque image, retrouvez son histogramme des niveaux de gris (**<u>Justifiez vos réponses)</u>**.

L'histogramme de l'image n°1 est l'image n° 8
Justification :
Cette image contient une large plage de niveaux de gris. Il semble cependant que le gris foncé (presque noir) et le blanc soient majoritaires. L'histogramme 8 semble répondre à cette exigence.

L'histogramme de l'image n°2 est l'image n° 6
Justification :
L'image semble être un bruit aléatoire dans lequel tous les niveaux de gris semblent être présents sans prédominance nettement visible. L'histogramme 6 semble répondre à cette exigence.

L'histogramme de l'image n°3 est l'image n° 7
Justification :
Cette image n'utilise que deux niveaux de gris équiprésents (nombre de pixels sombres = nombre de pixels clairs). Le seul histogramme à posséder cette propriété est l'image 7.

L'histogramme de l'image n°4 est l'image n° 10
Justification :
Cette image utilise 4 niveaux de gris de même surface. Le seul histogramme à posséder cette propriété est l'image 10

L'histogramme de l'image n°5 est l'image n° 9
Justification :
Cette image utilise 4 niveaux de gris de surfaces différentes. Le blanc semble plus présent (code 255). Le seul histogramme à posséder cette propriété est l'image 9.

Exercice 3: 7,5

Considérons le signal transitoire f(t) suivant obtenu à l'oscilloscope analogique (figure 1).

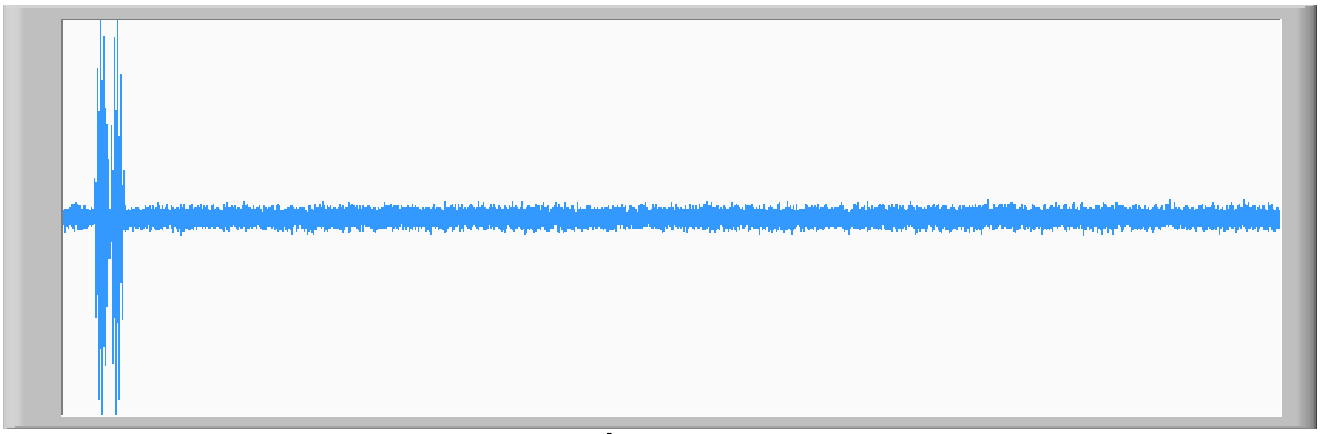


Figure 1

La figure 2 est un zoom sur la partie utile du signal.

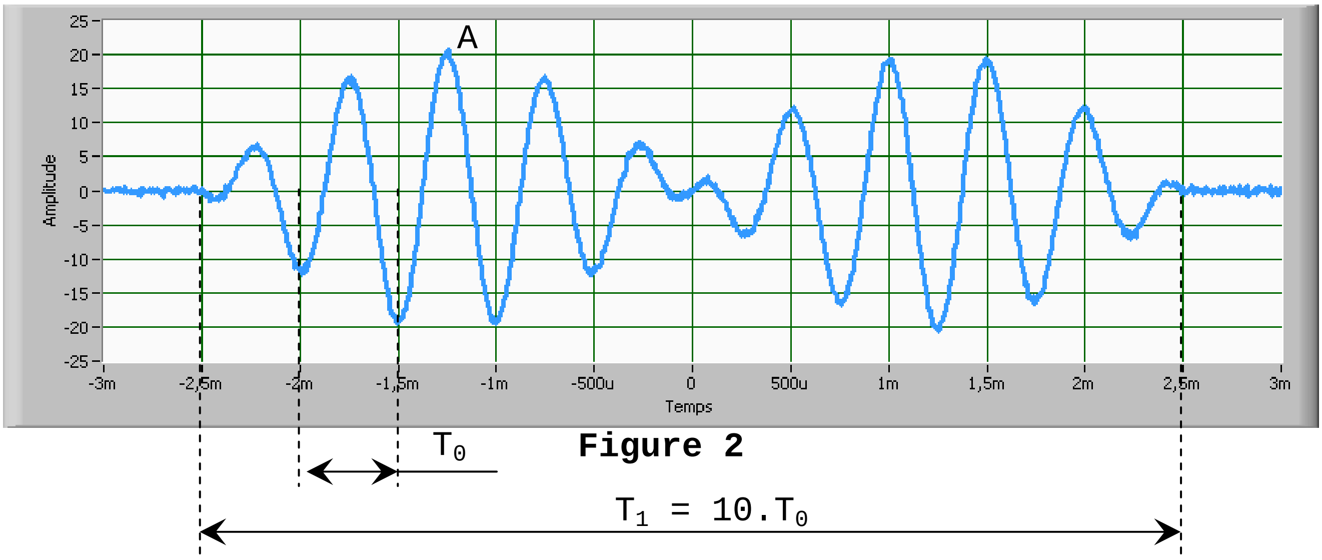


Figure 2

2 **1)** Proposez un modèle mathématique du signal f(t) (on donnera un modèle littéral et on précisera la valeur numérique de chacune des constantes introduites).

Le signal f(t) semble contenir un signal sinusoïdal modulé en amplitude par une unique période d'un signal sinusoïdal de fréquence dix fois plus faible. Un léger bruit additif est également présent. On l'ignorera par la suite.
Si on prend comme origine des temps le 0 du graphique, f(t) apparait comme le produit de trois fonctions : Un cosinus de fréquence ν_0 modulé en amplitude par un sinus de fréquence $\nu_1 = \dfrac{\nu_0}{10}$ observé au travers d'une porte de largeur T_1.

$$\boxed{f(t) = f_1(t)\, f_2(t)\, f_3(t)} \text{ avec } \boxed{\begin{cases} f_1(t) = \cos(2\pi\nu_0 t) \\ f_2(t) = A\sin(2\pi\nu_1 t) = A\sin\left(2\pi \dfrac{\nu_0}{10} t\right) \\ f_3(t) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{T_1}\right) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{10T_0}\right) \end{cases}}$$

$$\text{Où } \begin{cases} \nu_0 = \dfrac{1}{T_0} = 2\text{kHz} \\ \nu_1 = \dfrac{1}{T_1} = 200\text{Hz} \\ A = 20 \end{cases}$$

2 **2)** Déterminez $F(\nu)$ la transformée de Fourier de f(t) (à partir du modèle obtenu à la question précédente).

$$f_1(t) = \cos(2\pi\nu_0 t) \xrightarrow{\text{Fourier}} F_1(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)\right)$$

$$f_2(t) = A\sin(2\pi\nu_1 t) \xrightarrow{\text{Fourier}} F_2(\nu) = \frac{j}{2}A\delta(\nu+\nu_1) - \frac{j}{2}A\delta(\nu-\nu_1)$$

$$f_3(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \xrightarrow{\text{Fourier}} F_3(\nu) = T_1\,\mathrm{sinc}(T_1\nu)$$

$$F(\nu) = F_1(\nu) * F_2(\nu) * F_3(\nu)$$

$$F(\nu) = \frac{jT_1}{4}A\left[\mathrm{sinc}\left(T_1(\nu-\nu_0+\nu_1)\right) + \mathrm{sinc}\left(T_1(\nu+\nu_0+\nu_1)\right)\right]$$
$$-\frac{jT_1}{4}A\left[\mathrm{sinc}\left(T_1(\nu-\nu_0-\nu_1)\right) + \mathrm{sinc}\left(T_1(\nu+\nu_0-\nu_1)\right)\right]$$

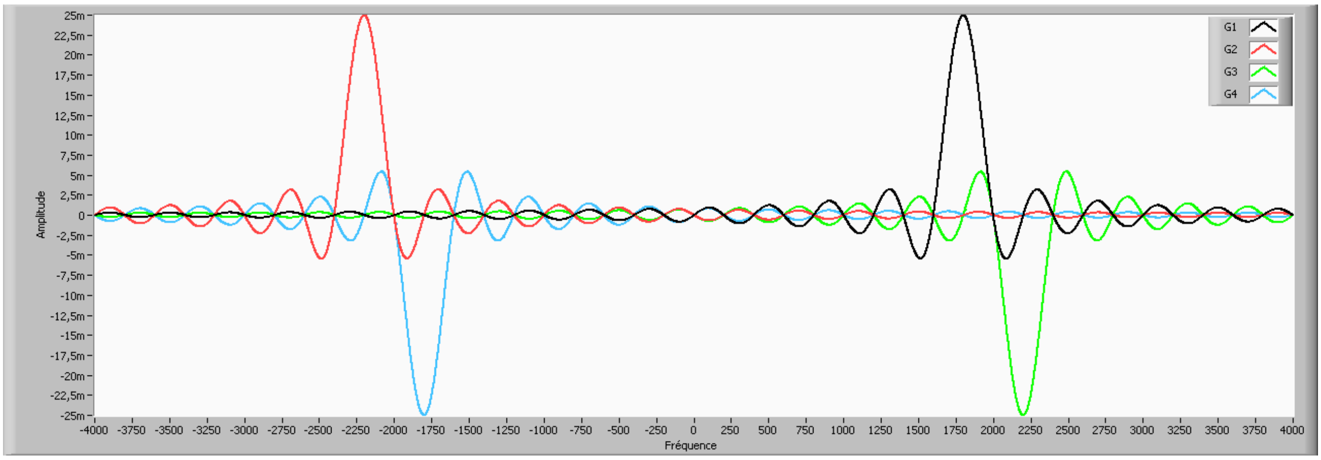
$$\boxed{\begin{aligned} F(\nu) &= \frac{jT_1}{4}A\left[\mathrm{sinc}\left(T_1(\nu-9\nu_1)\right) + \mathrm{sinc}\left(T_1(\nu+11\nu_1)\right)\right] \\ &- \frac{jT_1}{4}A\left[\mathrm{sinc}\left(T_1(\nu-11\nu_1)\right) + \mathrm{sinc}\left(T_1(\nu+9\nu_1)\right)\right] \end{aligned}}$$

Représentez graphiquement $|F(\nu)|$

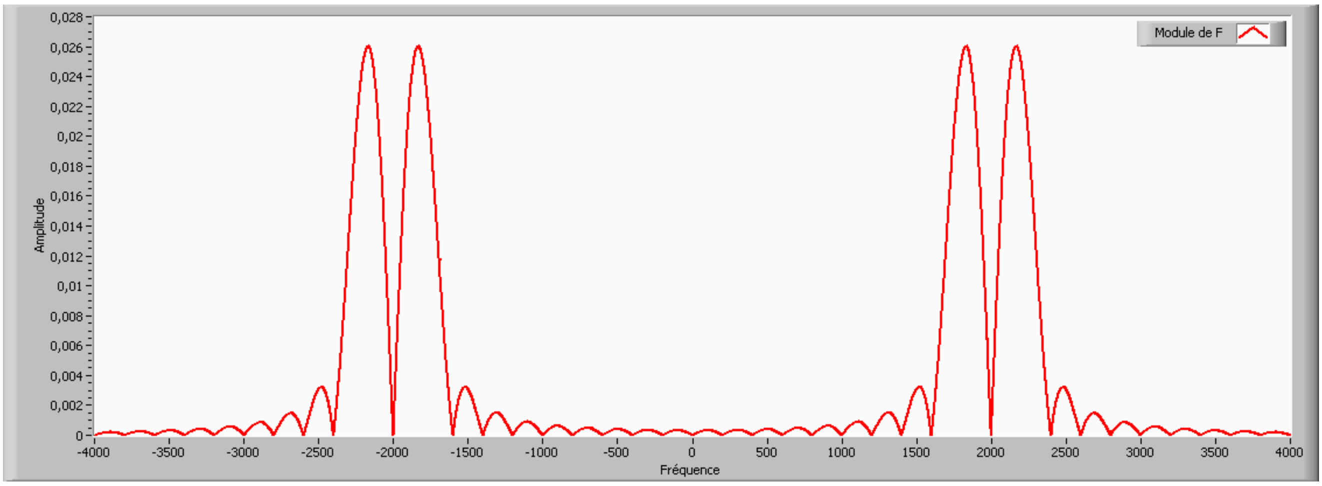
Posons $F(\nu) = G_1(\nu) + G_2(\nu) + G_3(\nu) + G_4(\nu)$ avec :

$$G_1(\nu) = \frac{jT_1}{4}A\ \mathrm{sinc}\left(T_1(\nu-9\nu_1)\right),\quad G_2(\nu) = \frac{jT_1}{4}A\ \mathrm{sinc}\left(T_1(\nu+11\nu_1)\right)$$

$$G_3(\nu) = -\frac{jT_1}{4}A\ \mathrm{sinc}\left(T_1(\nu-11\nu_1)\right),\quad G_4(\nu) = -\frac{jT_1}{4}A\ \mathrm{sinc}\left(T_1(\nu+9\nu_1)\right)$$



Et enfin $|F(\nu)|$:



On désire maintenant échantillonner le signal f(t).

2 **3)** Proposez deux méthodes qui permettent de déterminer les paramètres d'échantillonnage. Expliquez ces deux méthodes sans effectuer les calculs.

Les paramètres d'échantillonnage à déterminer sont la fréquence d'échantillonnage et le filtrage anti repliement.

La fréquence d'échantillonnage F_e se détermine en respectant les règles de Shannon.
Pour déterminer F_e, il est donc nécessaire de connaître la limite fréquentielle utile du spectre du signal.
En général nous avons 3 approches classiques différentes :

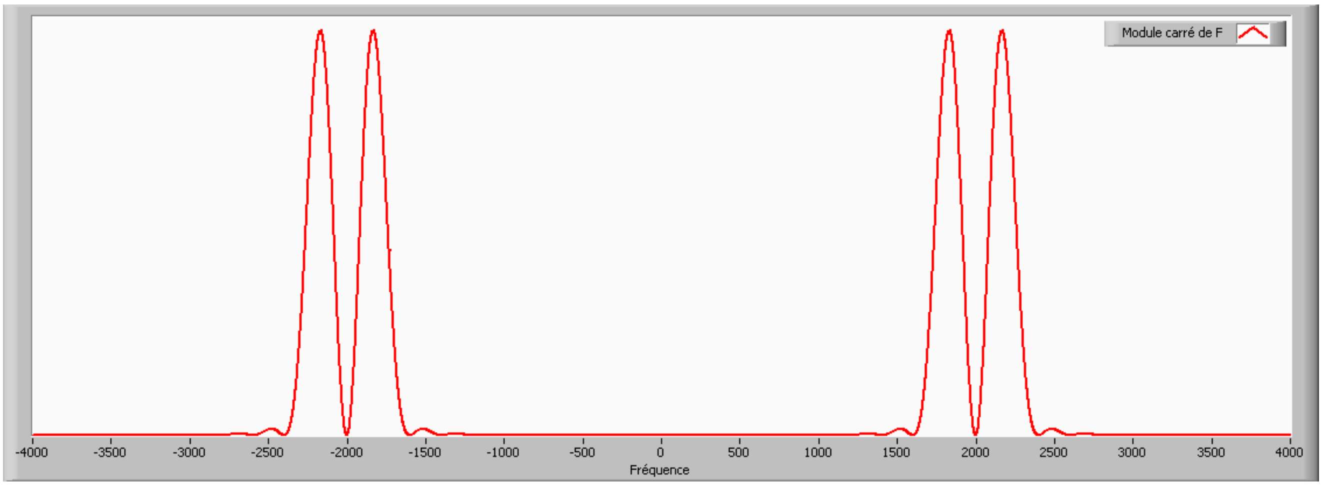
1. Réaliser un modèle mathématique simplifié du signal afin de déterminer par un calcul approché son spectre. En déduire la bande de fréquence utile sur des critères principalement énergétiques. Limiter le spectre réel au spectre utile par filtrage anti repliement. Puis appliquer les règles de Shannon sur cette limite fréquentielle supérieure.

2. Mesurer, si cela est possible, le spectre du signal puis en déduire la bande de fréquence utile sur des critères principalement énergétiques. Limiter le spectre réel au spectre utile par filtrage anti repliement. Puis appliquer les règles de Shannon sur cette limite fréquentielle supérieure.
3. Imposer empiriquement la fréquence d'échantillonnage en recherchant à obtenir par exemple 10 points dans la partie la plus raide du signal. En déduire alors la bande de fréquence qui sera correctement échantillonnée et la limiter par filtrage passe-bas anti repliement.

1,5 **4)** Développez la méthode de votre choix pour déterminer les paramètres d'échantillonnage.

Dans le cas présent, nous venons de calculer un modèle mathématique assez fidèle Utilisons donc la méthode n°1 décrite précédemment.

Si on observe $|F(\nu)|^2$, on remarque que vers 3kHz le signal n'a plus d'énergie significative. On peut donc prendre cette valeur comme limite de la bande utile.

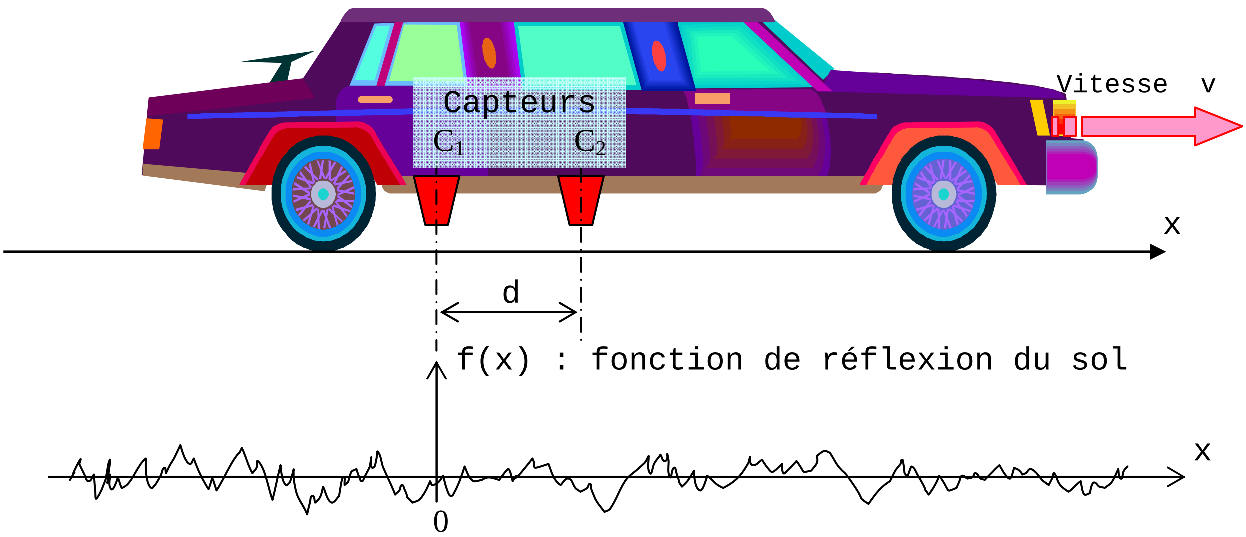


Nous placerons donc un filtre anti repliement passe-bas dont la bande passante se termine à 3000Hz. Nous choisirons ensuite la fréquence d'échantillonnage. Elle doit être supérieure à 2 fois la fréquence à laquelle le filtre a une atténuation jugée suffisante pour réjecter les fréquences indésirables. Si le filtre était idéal (cas d'école), sa fréquence de coupure serait de 3000Hz et $F_e \geq 6000$Hz.

Exercice 4: 5

Mesure de vitesse sans contact

Considérons un véhicule se déplaçant à la vitesse v selon un axe x. Deux capteurs optiques placés sous la caisse mesurent la réflexion locale du sol en deux endroits séparés d'une distance d dans l'axe du déplacement.



On considérera que la fonction de réflexion est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance A_0.

On prendra comme origine des temps, l'instant où le capteur 1 du véhicule est positionné en x=0 (cas de la figure).

0,5 **1)** Calculez $C_{ff}(\alpha)$ l'autocorrélation de la fonction de réflexion f(x).

Comme f(x) est assimilable à un bruit blanc de DSP constante A_0, on obtient l'autocorrélation grâce au théorème de Wiener-Kintchine.

$C_{ff}(\alpha)$ est donc la transformée inverse de Fourier de la DSP

D'où $\boxed{C_{ff}(\alpha) = A_0\delta(\alpha)}$

1 **2)** Soient $e_1(t)$ et $e_2(t)$ les signaux respectivement fournis par les capteurs C_1 et C_2. On considérera que les capteurs mesurent la fonction de réflexion f(x).

Déterminez les expressions de $e_1(t)$ et $e_2(t)$.

$\boxed{e_1(t) = f(vt)}$

$\boxed{e_2(t) = f(vt + d)}$

3) Calculez $C_{e_1e_2}(\tau)$ l'intercorrélation entre les signaux $e_1(t)$ et $e_2(t)$. (On fera apparaître l'autocorrélation de f.)

2

$$C_{e_1e_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_1(t)\, e_2^*(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(vt)\, f\left(v(t-\tau)+d\right) dt$$

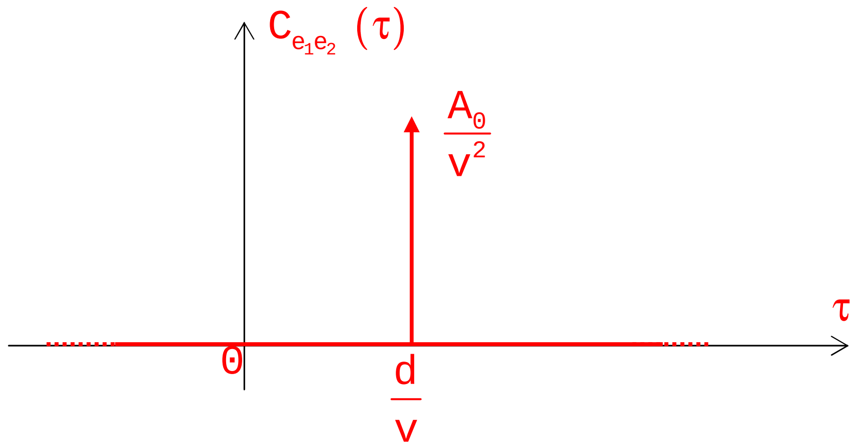
$C_{e_1e_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(vt)\, f(vt - v\tau + d)\, dt$ posons le changement de variable suivant $u = vt$, alors $du = v\,dt$ d'où

$$C_{e_1e_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, f\left(u - (v\tau - d)\right) \frac{du}{v}$$

$$C_{e_1e_2}(\tau) = \frac{1}{v} C_{ff}(v\tau - d) = \frac{1}{v} A_0 \delta(v\tau - d) = \frac{1}{v} A_0 \delta\left(v\left(\tau - \frac{d}{v}\right)\right)$$

$$\boxed{C_{e_1e_2}(\tau) = \frac{A_0}{v^2}\, \delta\left(\tau - \frac{d}{v}\right)}$$

0,5 Représentez graphiquement $C_{e_1e_2}(\tau)$.



1 En déduire une méthode de mesure de vitesse sans contact. (Expliquez)

On réalise l'intercorrélation des signaux e_1 et e_2 puis en recherchant l'abscisse du maximum on obtient la grandeur $\frac{d}{v}$.

d étant connue, on en déduit la vitesse v.